МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Рубцовский индустриальный институт (филиал)
федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего образования
"Алтайский государственный технический университет
им. И.И. Ползунова"(РИИ АлтГТУ)

Е.В. Никитенко

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Учебное пособие для студентов
направления "Информатика и вычислительная техника"

Рубцовск 2016

УДК 517.53

Никитенко Е.В. Теория функций комплексного переменного: Учебное пособие для студентов направления "Информатика и вычислительная техника". - Изд. 2-е. / Рубцовский индустриальный институт. - Рубцовск, 2016. - 59 с.

Учебное пособие посвящено изложению основ теории функции комплексного переменного.

Рассмотрено и одобрено на
заседании кафедры ПМ Рубцовского
индустриального института.
Протокол №5 от 20.01.2016 г.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Г.В. Демиденко

Содержание

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1.1. Комплексное число и действия над комплексными числами

Напомним некоторые известные понятия и факты из теории комплексных чисел.

Комплексным числом называется выражение вида

$$z = x + iy, \tag{1}$$

где x и y - действительные числа, а i - символ, который называется мнимой единицей. Числа x и y называются, соответственно, *действительной* и *мнимой* частями комплексного числа $z = x + iy$ и обозначаются символами

$$x = \Re e(z), \quad y = \Im m(z).$$

Если, в частности, $y = 0$, то $x + i0$ считается совпадающим с действительным числом x; если $x = 0$, то $0 + iy$ обозначается просто iy и называется *чисто мнимым.* Множество комплексных чисел будем обозначать $\mathbb{C}$. Понятно, что $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Определим на множестве комплексных чисел понятие равенства и простейшие операции. Будем говорить, что комплексные числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ *равны* тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2, \ y_1 = y_2$.

Положим по определению

$$1) \ z_1 \pm z_2 = x_1 \pm x_2 + i(y_1 \pm y_2);$$

$$2) \ z_1 \cdot z_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1);$$

$$3) \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \text{ при } z_2 \neq 0.$$

Число $x - iy$ называется *комплексно сопряженным* с числом $z = x + iy$ и обозначается через $\overline{z}$.

Если рассмотреть плоскость декартовых координат xOy и условиться изображать комплексное число $z = x + iy$ точкой с координатами (x, y), то мы получим взаимно однозначное соответствие между $\mathbb{C}$ и множеством точек плоскости. При этом действительные числа будут изображаться точками оси x (которую мы в дальнейшем будем называть *действительной осью*), чисто мнимые – точками оси y (называемой *мнимой осью*).

Наряду с представлением комплексных чисел в декартовой форме записи (1), полезно иметь их представление в полярной форме. Для этого, как обычно, совместим полярную ось с положительной полуосью x, а полюс – с началом координат. Получим:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ – полярный радиус и φ – полярный угол точки $z = x + iy$.

Полярный радиус r называется *модулем* комплексного числа z и обозначается символом $|z|$, угол φ – его *аргументом* и обозначается символом

$\operatorname{Arg} z$. Аргумент комплексного числа $z = 0$ не определен, а его модуль равен нулю.

В то время как модуль комплексного числа определяется однозначно, его аргумент определен лишь с точностью до любого слагаемого, кратного 2π:

$$\varphi = \operatorname{Arg} z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + 2k\pi & \text{(I и IV квадранты);} \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + (2k+1)\pi & \text{(II и III квадранты).} \end{cases}$$

Среди всех значений $\operatorname{Arg} z$, существует только одно, лежащее в промежутке $(-\pi, \pi]$ (или $[0, 2\pi)$). Оно называется *главным* и обозначается $\arg z$. Таким образом, можно записать

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, \text{ где } \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots .$$

Для двух комплексных чисел z_1 и z_2 имеют место неравенства треугольника

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|; \qquad |z_1 - z_2| \ge ||z_1| - |z_2||.$$

Поскольку $z_1 + z_2 = z_1 - (-z_2)$, $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$, а $|-z_2| = |z_2|$, то отсюда получим следующее двойное неравенство

$$||z_1| - |z_2|| \le |z_1 \pm z_2| \le |z_1| + |z_2|.$$

Используя формулу Эйлера (полный смысл этого выражения будет установлен в дальнейшем)

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}, \tag{2}$$

получим показательную форму записи комплексного числа:

$$z = re^{i\varphi}. \tag{3}$$

Из определения произведения следует, что при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. В самом деле, имеем:

$$\begin{gathered} z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = \\ = r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + +i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_2 \cos \varphi_1)] = \\ = r_1 r_2 [(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)] = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}. \end{gathered} \tag{4}$$

Таким образом, введенная выше функция $e^{i\varphi}$ обладает свойством:

$$e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

В случае деления комплексных чисел $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ при $r_2 \neq 0$ имеет место аналогичное соотношение:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Применяя формулу (4) n - раз, получим формулу Муавра:

$$z^n = |z|^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)).$$

Легко проверить, что она справедлива и для отрицательных целых n.

Научимся теперь извлекать корни, т.е. решать уравнение $z^n = w$, где $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = |w|(\cos\theta + i\sin\theta)$. Подставив эти выражения в уравнение, получим:

$$|z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) = |w|(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Отсюда следует, что $|z|^n = |w|$ и $n\varphi = \theta + 2k\pi$. Выразив искомые величины $|z|$ и φ, получим:

$$|z| = \sqrt[n]{|w|}, \quad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \text{ где } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \ .$$

Окончательно формула для извлечения корней примет вид:

$$z = \sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{|w|}(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}), \text{ где } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \ ,$$

причем $\sqrt[n]{|w|}$ - арифметическое значение корня, а среди значений $\sqrt[n]{w}$ различными являются только n, соответствующие значениям $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

1.2. Изображение комплексных чисел на сфере

В евклидовом пространстве E_3 с декартовыми ортогональными координатами, ξ, η, ζ рассмотрим сферу S радиуса $\frac{1}{2}$ с центром в точке $(0, 0, \frac{1}{2})$:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \zeta = 0. \tag{5}$$

Плоскость $\zeta = 0$ совместим с комплексной плоскостью $\mathbb{C}$, действительная ось x которой совпадает с осью ξ, а мнимая ось y – с осью η.

Соединим точку $z = x + iy$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с точкой $P(0, 0, 1)$ отрезком прямой. Он пересечет сферу S в отличной от P точке $M(\xi, \eta, \zeta)$, которая называется *стереографической проекцией* точки z на сферу S с полюсом P (см. рис. 1).

Стереографическая проекция устанавливает *взаимно однозначное соответствие* между точками сферы S с выколотым полюсом P и точками комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Из коллинеарности точек $P(0, 0, 1)$, $M(\xi, \eta, \zeta)$ и z следует, что

$$\frac{\xi}{x} = \frac{\eta}{y} = \frac{\zeta - 1}{-1},$$

или

$$x = \frac{\xi}{1 - \zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1 - \zeta}, \quad z = \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta}. \tag{6}$$

В силу последнего из равенств (6) с учетом (5) имеем

$$|z|^2 = \frac{\xi^2 + \eta^2}{(1 - \zeta)^2} = \frac{\zeta}{1 - \zeta},$$

откуда

$$\zeta = \frac{|z|^2}{1 + |z|^2}. \tag{7}$$

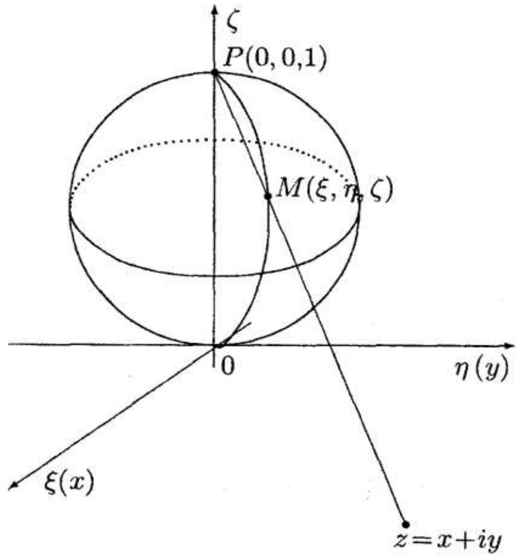

Рис. 1. Стереографическая проекция

Подставив значение ζ из (7) в (6), получим

$$\xi = \frac{x}{1+|z|^2}, \quad \eta = \frac{y}{1+|z|^2}. \tag{8}$$

Равенства (7) и (8) называются *формулами стереографической проекции.*

Отметим без доказательства два свойства стереографической проекции:

1) она сопоставляет окружности (и прямой) на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ окружность на сфере S и обратно;

2) она сохраняет углы.

Введем теперь в рассмотрение «*бесконечно удаленную точку*» $z = \infty$ и «пополним» комплексную плоскость присоединением к ней *единственной бесконечно удаленной точки*, соответствующей числу $z = \infty$. Комплексная плоскость вместе с бесконечно удаленной точкой называется *расширенной комплексной плоскостью* и обозначается через $\overline{\mathbb{C}}$.

Дополняя соответствие, установленное стереографической проекцией, сопоставлением бесконечно удаленной точки полюсу P сферы S, получим взаимно однозначное соответствие между расширенной комплексной плоскостью $\overline{\mathbb{C}}$ и сферой S.

Эта интерпретация комплексных чисел была предложена Риманом, поэтому S называют *сферой Римана.*

Заметим, что аргумент комплексного числа $z = \infty$ не определен, так же как его действительная и мнимая части.

Будем полагать, что $\frac{z}{\infty} = 0$ при $z \neq \infty$ и $\frac{1}{0} = \infty$. И вообще для бесконечно удаленной точки устанавливаются следующие отношения: $z \cdot \infty = \infty$ при $z \neq 0$, $z + \infty = \infty$, которые естественны с точки зрения предельного перехода в операциях сложения и умножения.

1.3. Множества на расширенной комплексной плоскости

Будем называть:

- *окрестностью* (δ - *окрестностью*) точки $z_0 \in \mathbb{C}$ множество точек $z \in \mathbb{C}$, удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < \delta, \delta > 0$, и обозначать ее через $C(\delta, z_0)$;

- *проколотой окрестностью* точки z_0 множество $C^*(\delta, z_0) = C(\delta, z_0) \backslash z_0$;

- *окрестностью бесконечно удаленной точки* множество точек $z \in \overline{\mathbb{C}}$, удовлетворяющих неравенству $|z| > \delta$;

- точку z *изолированной* точкой множества $E \subset \overline{\mathbb{C}}$, если существует такое число $\delta > 0$, что пересечение $E \cap C(\delta, z)$ состоит из единственной точки z: $E \cap C(\delta, z) = z$;

- точку z *предельной* точкой множества E, если в любой окрестности точки z имеется бесконечное множество точек этого множества. Заметим, что сама точка z может принадлежать, а может и не принадлежать множеству E;

- точку z *внутренней* точкой множества E, если существует такое число $\delta > 0$, что $C(\delta, z) \subset E$;

- точку z *внешней* точкой множества E, если существует такое число $\delta > 0$, что $E \cap C(\delta, z) = \emptyset$;

- точку z *граничной* точкой множества E, если в любой ее окрестности имеются как точки множества E, так и точки, не принадлежащие этому множеству. Заметим, что если граничная точка множества E не принадлежит E, то она является его предельной точкой;

- совокупность всех граничных точек множества E *границей* этого множества и обозначать через ∂E;

- множество E *ограниченным*, если все его точки лежат в некотором круге $|z| < R$, $0 < R < \infty$;

- множество E *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки. В частности, оно может не иметь предельных точек;

- *замыканием* множества E множество $\overline{E} = E \cup \partial E$;

- множество *открытым*, если каждая точка этого множества является его внутренней точкой;

- множество *связным*, если его нельзя представить в виде объединения двух непустых непересекающихся множеств, каждое из которых не содержит предельных точек другого;

- *областью* открытое связное множество;

- *замкнутой областью* множество, состоящее из области и ее границы.

Заметим, что расширенная комплексная плоскость одновременно является открытым и замкнутым множеством.

Легко видеть, что граница любого множества является замкнутым множеством.

1.4. Последовательности и ряды

Рассмотрим последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$, где $z_n = x_n + iy_n$.

Комплексное число $z_0 = x_0 + iy_0$ называется пределом последовательности $\{z_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число $N = N(\varepsilon)$, что для всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|z_n - z_0| < \varepsilon.$$

В этом случае говорят, что последовательность $\{z_n\}$ сходится к числу z_0, и пишут

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0.$$

Из определения, в частности, следует, что соотношения $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = 0$ эквивалентны.

Так как при $n > N$ выполняются неравенства $|x_n - x_0| \leq |z_n - z_0| < \varepsilon$, $|y_n - y_0| \leqslant |z_n - z_0| < \varepsilon$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$, т.е. из сходимости последовательности z_n следует сходимость последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. Обратно, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число $N = N(\varepsilon)$, что $|x_n - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|y_n - y_0| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $n > N$, а тогда $|z_n - z_0| \leq |x_n - x_0| + |y_n - y_0| < \varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$.

Таким образом, соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + iy_n) = x_0 + iy_0$ *эквивалентно* двум соотношениям: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$.

Это замечание позволяет перенести всю теорию пределов последовательностей действительных чисел на последовательности комплексных чисел, например, *критерий Коши*: для сходимости последовательности z_n необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое натуральное число $N = N(\varepsilon)$, что неравенство $|z_{n+m} - z_n| < \varepsilon$ выполняется для любого натурального числа m и для любого $n > N$.

Геометрически сходимость последовательности $\{z_n\}$ к точке z_0 означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$, что все точки этой последовательности с номерами, большими N, будут принадлежать ε - окрестности точки z_0.

Будем говорить, что последовательность $\{z_n\}$ имеет бесконечный предел (сходится к бесконечности), и записывать

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty,$$

если для любого $R > 0$ существует такое натуральное число $N = N(R)$, что $|z_n| > R$ при $n > N$.

Понятно, что соотношения $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = \infty$ эквивалентны. Если $z_n \neq 0$, то эквивалентны также соотношения $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{z_n} = 0$.

Последовательность $\{z_n\}$ называется ограниченной, если существует такое действительное число M, что для всех n выполняется неравенство

$$|z_n| < M.$$

Будем говорить, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k, \; z_k \in \mathbb{C} \tag{9}$$

сходится (расходится), если сходится (расходится) последовательность $\{S_n\}$ его частичных сумм $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} z_k$.

Предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, если он существует, называется суммой ряда (9).

Пусть ряд (9) сходится, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Тогда из равенства $S_n - S_{n-1} = z_n$ легко получить необходимое условие сходимости ряда:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

Далее, так как $S_{n+m} - S_n = \sum\limits_{k=1}^{m} z_{n+k}$, то критерий Коши сходимости последовательности S_n для ряда (9) перефразируется следующим образом: для сходимости ряда (9) необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое натуральное число $N = N(\varepsilon)$, что $\left|\sum\limits_{k=1}^{m} z_{n+k}\right| < \varepsilon$ для любого натурального числа m и любого $n > N$.

Ряд (9) называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |z_k|$.

В силу неравенства $\left|\sum\limits_{k=1}^{m} z_{n+k}\right| \le \sum\limits_{k=1}^{m} |z_{n+k}|$ и критерия Коши из абсолютной сходимости ряда (9) следует его сходимость. Если ряд сходится, но не абсолютно, то он называется условно сходящимся.

Пусть $z_k = x_k + iy_k$. Из неравенств $|x_k| \le |z_k|$, $|y_k| \le |z_k|$ и $|z_k| \le |x_k| + |y_k|$ вытекает, что абсолютная сходимость ряда (9) эквивалентна абсолютной сходимости рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$. Следовательно, на ряды комплексных чисел переносится теорема о том, что можно произвольно переставлять члены абсолютно сходящегося ряда, не меняя его суммы.

1.5. Кривая Жордана

Пусть $x(t), y(t)$ - непрерывные на отрезке $[\alpha, \beta]$, действительные функции. Уравнения

$$x = x(t), \; y = y(t), \; t \in [\alpha, \beta] \tag{10}$$

дают параметрическое представление *непрерывной кривой*.

Непрерывная кривая называется *кривой Жордана*, если двум различным значениям параметра t (за исключением, быть может, значений $t = \alpha$ и $t = \beta$) соответствуют две различные точки кривой.

В комплексной записи уравнения (10) имеют вид

$$z = z(t) = x(t) + iy(t),\ t \in [\alpha, \beta].$$

Кривая Жордана называется *замкнутой*, если $z(\alpha) = z(\beta)$.

Положительным направлением на замкнутой кривой Жордана будем считать направление, оставляющее ограниченную ею внутреннюю область слева, а на незамкнутой (разомкнутой) - направление, соответствующее возрастанию параметра t.

Кривая Жордана называется *гладкой*, если функции $x(t), y(t)$ имеют в интервале (α, β) непрерывные производные, причем $z'(t) = x'(t)+iy'(t) \neq 0$, и существуют отличные от нуля пределы $\lim\limits_{t\to\alpha+0} z'(t)$ и $\lim\limits_{t\to\beta-0} z'(t)$, равные между собой в случае замкнутой кривой.

Заметим, что если кривая, заданная уравнениями (10), имеет в точке $z = z(t)$ касательную, образующую с действительной осью угол φ, то

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

и

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y'(t)}{x'(t)} = \arg z'(t).$$

Следовательно, условие $z'(t) \neq 0$ и непрерывность $z'(t)$ для гладкой кривой Жордана, заданной уравнением $z = z(t)$, означают соответственно существование касательной и непрерывность угла наклона этой касательной, равного $\arg z'(t)$.

Кривая Жордана называется *кусочно-гладкой*, если ее можно разбить на конечное число гладких кривых или, в случае замкнутой кривой, у нее имеется одна угловая точка (например, если для замкнутой кривой выполняются все условия гладкости, кроме последнего, т.е. если $\lim\limits_{t\to\alpha+0} z'(t) \neq \lim\limits_{t\to\beta-0} z'(t)$).

2. Функции комплексного переменного

2.1. Основные определения

Пусть даны две плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ и $w = u + iv$. Рассмотрим некоторое множество точек E в плоскости z и множество D в плоскости w.

Если каждому $z \in E$ по некоторому закону f поставлено в соответствие определенное комплексное число $w \in D$, то говорят, что на множестве E определена однозначная функция комплексного переменного, отображающая множество E в множество D, и пишут $w = f(z)$. Учитывая, что $z = x + iy$, $w = u + iv$, получим

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

т.е. задание комлекснозначной функции комплексного переменного z, равносильно заданию двух действительных функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ от переменных x, y.

Множество E называется *областью определения* функции $f(z)$.

Функция $f(z)$ называется взаимно однозначной или *однолистной* на множестве E, если для всех z_1, z_2 из E и $z_1 \neq z_2$, имеем $f(z_1) \neq f(z_2)$.

Если каждому $z \in E$ соответствует несколько различных значений w, то функция $w = f(z)$ называется *многозначной*.

Пусть на множестве E плоскости z определена функция $w = f(z)$, и пусть z_0 - предельная точка множества E. Мы скажем, что число w_0 есть предел функции $w = f(z)$ в точке z_0 (или, что то же самое, при $z \to z_0$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое что

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon \text{ для всех } z, \text{ удовлетворяющих } 0 < |z - z_0| < \delta.$$

Другими словами, для любой окрестности $C(w_0, \varepsilon)$ найдется некоторая проколотая окрестность $C^*(z_0, \delta)$, такая что

$$w = f(z) \in C(w_0, \varepsilon) \text{ для всех } z \in C^*(z_0, \delta).$$

Символически это записывается привычным обозначением: $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$.

Функция $f(z)$ называется непрерывной в точке z_0, если

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0). \tag{11}$$

Таким образом, непрерывная в точке z_0 функция должна быть определена в некоторой окрестности этой точки и должно выполняться равенство (11).

Функция $f(z)$ называется непрерывной на множестве E, если она непрерывна в каждой точке z этого множества.

Функция $f(z)$ называется равномерно непрерывной на множестве E, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любых двух точек z_1, z_2 из E, удовлетворяющих условию $|z_1 - z_2| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$.

Непрерывность функции $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ равносильна непрерывности ее действительной и мнимой частей $u(x,y)$ и $v(x,y)$. Поэтому многие свойства непрерывных функций действительного переменного переносятся на функции комплексного переменного. Так, вместе с $f(z)$ и $g(z)$ непрерывными будут (в их общем множестве непрерывности E) $f(z) \pm g(z)$, $f(z) \cdot g(z)$ и $\frac{f(z)}{g(z)}$ (за исключением точек, в которых $g(z) \neq 0$).

Кроме того, если функция $f(z)$ непрерывна на замкнутом множестве G, то она:

1) ограничена на этом множестве, т.е. для всех $z \in G$

$$|f(z)| \leq M = const < \infty;$$

2) достигает на G своей верхней и нижней грани, т.е. существуют такие точки $z_1, z_2 \in G$, что

$$|f(z_1)| = \sup_{z \in G} |f(z)|, \ |f(z_2)| = \inf_{z \in G} |f(z)|;$$

3) равномерно непрерывна на G (теорема Кантора).

2.2. Элементарные функции и их обращение

Степенная функция и ее обращение. Рассмотрим сначала подробно функцию $w = z^2$. Это однозначная функция, определенная на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Однако однолистной она не является, так как $z^2 = (-z)^2$. Таким образом, обратная функция $z = \sqrt{w}$ не является однозначной.

Найдем области однолистности функции $w = z^2$. Пусть $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$. Если $z_1^2 = z_2^2$, то $r_1 = r_2$ и $2\varphi_1 = 2\varphi_2 + 2k\pi$ или $\varphi_1 = \varphi_2 + k\pi$. Таким образом, в области однолистности не должно быть чисел, аргументы которых отличаются на π. Для простоты, в качестве областей однолистности возьмем верхнюю и нижнюю полуплоскости.

Функция $w = z^2$ отображает верхнюю полуплоскость $\{z |\ 0 < \arg z < \pi\}$ на плоскость w с разрезом вдоль луча $w \geq 0$. При этом граничные лучи $\arg z = 0$ и $\arg z = \pi$ полуплоскости переходят соответственно в верхний и нижний край (берег) разреза.

В силу однолистности отображения, существует однозначное обратное $z_0 = (\sqrt{w})_0$. Записывая w в показательной форме, получим:

$$z_0 = (\sqrt{w})_0 = \sqrt{r} e^{\frac{i\varphi}{2}}, \text{ где } r = |w|, \ \varphi = \arg w.$$

Нижнюю полуплоскость функция $w = z^2$ также отображает на плоскость w с разрезом вдоль луча $w \geq 0$. Причем луч $\arg z = \pi$ переходит в верхний край разреза, а луч $\arg z = 2\pi$ - в нижний край разреза. В показательной форме обратная функция примет вид:

$$z_1 = (\sqrt{w})_1 = \sqrt{r} e^{\frac{i(\varphi + 2\pi)}{2}}.$$

Таким образом, на плоскости w с разрезом вдоль луча $w \geq 0$ существует две непрерывные однозначные функции, каждая из которых принимает одно из значений $\sqrt{w}$.

Если рассмотреть $\sqrt{w}$ в области, содержащей замкнутую кривую, обходящую точку $w = 0$, то функции $(\sqrt{w})_0$ и $(\sqrt{w})_1$ нельзя отделить друг от друга. Действительно, двигаясь по указанной кривой и возвращаясь в исходную точку, получим приращение $\arg w$ на 2π, что приводит к тому, что функции $(\sqrt{w})_0$ и $(\sqrt{w})_1$ переходят одна в другую.

Поэтому функции $z = (\sqrt{w})_0$ и $z = (\sqrt{w})_1$ называют *ветвями* многозначной функции $z = \sqrt{w}$. Точка, обход вокруг которой в достаточно малой ее окрестности приводит к другому значению функции при непрерывном ее изменении, называется *точкой ветвления* этой многозначной функции. Для функции $z = \sqrt{w}$ таких точек две: $w = 0$ и $w = \infty$.

Можно построить геометрический объект, взаимно однозначно соответствующий плоскости z, при отображении $z = \sqrt{w}$. Для этого возьмем два экземпляра плоскости w с разрезом вдоль луча $w \geq 0$, расположим их один над другим и склеим нижний берег разреза одной плоскости с верхним берегом разреза другой, и наоборот. Получим так называемую *риманову поверхность* функции $z = \sqrt{w}$. При этом обход точки ветвления приводит к переходу на другой лист римановой поверхности.

Теперь, по аналогии, рассмотрим общий случай $z = \sqrt[n]{w}$. Легко понять, что области однолистности - это сектора:

$$D_k = \left\{ z \,\middle|\, \frac{2k\pi}{n} < \arg z < \frac{2(k+1)\pi}{n} \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Каждая из областей D_k взаимно однозначно отображается на плоскость w с разрезом вдоль луча $w \geq 0$. Значит, обратная функция $z = \sqrt[n]{w}$ является n - значной. Для каждой из областей D_k можно выделить ветвь функции $z = \sqrt[n]{w}$:

$$z_k = (\sqrt[n]{w})_k = \sqrt[n]{r} e^{\frac{i(\varphi + 2k\pi)}{n}}.$$

Точки $w = 0$ и $w = \infty$ являются *алгебраическими* точками ветвления *порядка* $n - 1$ многозначной функции $z = \sqrt[n]{w}$. При обходе вокруг каждой из них на плоскости w мы переходим от ветви z_k к ветви z_{k+1}, а после z_{n-1} - к ветви z_0. Риманова поверхность состоит из n листов.

Показательная функция и ее обращение. Ранее была введена показательная форма записи $e^y = \cos y + i \sin y$ и было показано, что $e^{y_1} \cdot e^{y_2} = e^{y_1 + y_2}$. Опираясь на это, определим показательную функцию комплексного переменного:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Укажем важнейшие свойства функции e^z.

а) Как и для действительного случая, справедливо равенство:

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}.$$

б) В отличие от случая действительной переменной, функция e^z периодическая, с периодом $T = 2\pi i$:

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z.$$

в) Функция e^z непрерывна на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, так как $\mathfrak{Re}(e^z) = e^x \cos y$ и $\mathfrak{Im}(e^z) = e^x \sin y$ являются непрерывными функциями двух действительных переменных.

Найдем $z = x + iy$ такое, что $e^z = w$. Из уравнения

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) = |w| e^{i \arg w}$$

находим

$$e^x = |w|, \quad y = \arg w + 2k\pi,$$

т.е.

$$z = \ln |w| + i(\arg w + 2k\pi).$$

Таким образом, обратная функция - логарифмическая -

$$z = \operatorname{Ln} w = \ln |w| + i(\arg w + 2k\pi)$$

является бесконечнозначной. Ее ветвь, соответствующая $k = 0$, называется *главным значением* логарифма и обозначается

$$z = \ln w = \ln |w| + i \arg w.$$

Логарифм не определен в точке $w = 0$.

Найдем области однолистности функции $w = e^z$. Если $e^{z_1} = e^{z_2}$, то $e^{x_1} = e^{x_2}$, т.е. $x_1 = x_2$ и $e^{iy_1} = e^{iy_2}$, т.е. $y_1 = y_2 + 2k\pi$. Следовательно, любая полоса шириной 2π со сторонами, параллельными действительной оси, является областью однолистности функции $w = e^z$. Разобьем плоскость z на полосы:

$$D_k = \{z|\ 2k\pi < \mathfrak{Im} z < 2(k+1)\pi\ \}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\ .$$

Каждая такая полоса взаимно однозначно отображается на плоскость с разрезом по лучу $(0, \infty)$.

Риманова поверхность функции $z = \operatorname{Ln} w$ склеивается из бесконечного числа листов. Точки $w = 0$ и $w = \infty$ являются трансцендентными точками ветвления: при обходе вокруг любой из них происходит переход на все новые и новые ветви бесконечнозначной функции $z = \operatorname{Ln} w$.

Общие показательные и степенные функции. Для произвольного комплексного числа α можно определить степенную функцию:

$$w = z^\alpha = e^{\alpha Lnz}.$$

Аналогично определяется показательная функция с произвольным основанием β:

$$w = \beta^z = e^{zLn\beta}.$$

Очевидно, что в общем случае эти функции многозначны.

Тригонометрические функции и обратные к ним. Определим тригонометрические функции равенствами:

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), \quad \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}. \tag{12}$$

Отметим важные свойства этих функций:

а) Если $z = x \in \mathbb{R}$, то $\sin z$, $\cos z$ – обычные тригонометрические функции действительной переменной:

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) = \frac{1}{2i}((\cos x + i\sin x) - (\cos x - i\sin x)) = \sin x.$$

б) Очевидно, функции $\sin z$, $\cos z$ непрерывны на $\mathbb{C}$.

в) Можно убедиться в справедливости для функций $\cos z$, $\sin z$ всех формул тригонометрии. Так, равенство $\sin z = 0$ в силу (12) дает $e^{iz} - e^{-iz} = 0$ или $e^{2iz} = 1 = e^{2k\pi i}$, т. е. нули функции $\sin z$ имеют вид $z = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \ldots$ Аналогично получим, что $\cos z = 0$ при $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$.Однако $\cos z$, $\sin z$ *не ограничены* на комплексной плоскости z. Например,

$$|2\cos z|^2 = (e^{iz} + e^{-iz})(e^{-i\bar{z}} + e^{i\bar{z}}) = e^{-2y} + e^{2y} + 2\cos 2x \to \infty$$

при $z \to \infty$ так, что $|y| = |\mathfrak{Im} z| \to \infty$.

Обратные тригонометрические функции. Пусть $w \in \mathbb{C}$. Найдем z такое, что $\sin z = w$. Из уравнения

$$w = \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{2iz} - 1}{2ie^{iz}}$$

находим

$$e^{2iz} - 2iwe^{iz} - 1 = 0, \quad e^{iz} = iw \pm \sqrt{1 - w^2},$$

т.е.

$$iz = \operatorname{Ln}(iw \pm \sqrt{1 - w^2}).$$

Таким образом,

$$z = \operatorname{Arcsin} w = -i[\ln|iw \pm \sqrt{1 - w^2}| + i[\arg(iw \pm \sqrt{1 - w^2}) + 2k\pi]]$$

– бесконечнозначная функция ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Ее ветвь, соответствующая $k = 0$, называется главной и обозначается

$$z = \arcsin w = -i\ln(iw \pm \sqrt{1 - w^2}).$$

Области однолистности функции $w = \sin z$ можно выбрать по-разному. Такими областями, например, являются полосы

$$D_k = \left\{ z |\ (2k-1)\frac{\pi}{2} < \mathfrak{Re} z < (2k+1)\frac{\pi}{2} \right\}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Каждая такая полоса взаимно однозначно отображается на плоскость с разрезами по лучам $(-\infty, -1)$ и $(1, \infty)$.

Функция $z = \arcsin w$ имеет две алгебраические точки ветвления $w = \pm 1$ и одну трансцендентную точку ветвления $w = \infty$.

Аналогично можно получить

$$z = \operatorname{Arccos} w = -i[\ln|w \pm \sqrt{w^2-1}| + i[\arg(w \pm \sqrt{w^2-1}) + 2k\pi]],$$

$$z = \operatorname{Arctg} w = -\frac{i}{2}\left[\ln\left|\frac{1+iw}{1-iw}\right| + i\left(\arg\frac{1+iw}{1-iw} + 2k\pi\right)\right].$$

Гиперболические функции. Определим *гиперболические* функции следующим образом:

$$\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \quad \operatorname{sh} z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}), \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}.$$

В силу (12) они связаны с тригонометрическими функциями соотношениями

$$\cos iz = \operatorname{ch} z, \quad \sin iz = i \operatorname{sh} z.$$

2.3. Определение производной. Условия Коши-Римана

Пусть задана однозначная функция $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ на области E комплексной плоскости z.

Производной функции $f(z)$ в точке z называется предел

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}, \ z + \Delta z \in E. \tag{13}$$

Этот предел обозначается $f'(z)$, а сама функция $f(z)$ называется *дифференцируемой* (моногенной) в точке z.

Поскольку в случае моногенности функции $f(z)$ предел $f'(z)$ не зависит от способа стремления $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ к нулю, то, положив сначала $\Delta z = \Delta x$ $(\Delta y = 0)$, а потом $\Delta z = i\Delta y$ $(\Delta x = 0)$, получим

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} + i\frac{v(x+\Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x}\right] = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0}\left[\frac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y)}{i\Delta y} + \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x,y)}{\Delta y}\right] = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y},$$

откуда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{14}$$

Равенства (14) называются условиями Коши–Римана.

Таким образом, если функция $f(z)$ моногенна в точке z, то существуют частные производные u_x, u_y, v_x, v_y, которые связаны между собой условиями (14). Одного выполнения условий Коши–Римана недостаточно для моногенности $f(z)$, что показывает пример функции

$$f(z) = \begin{cases} e^{-1/z^4}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases} \tag{15}$$

Заметим сначала, что если для функции $f(z)$ имеем $f(0) = 0$, то ее производную $f'(0)$ можно вычислять как $\lim\limits_{z\to 0}\frac{f(z)}{z}$, поэтому для функции (15) в точке $z = 0$, полагая $z = x$, а затем $z = iy$, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x^4}} = u_x + iv_x = 0,$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(iy)}{iy} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{iy}e^{-\frac{1}{y^4}} = v_y - iu_y = 0,$$

т.е. $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$ в точке z, и условия (14) выполнены, но $f(z)$ не моногенна, даже не непрерывна в точке $z = 0$, так как $f[(1+i)x] = e^{\frac{1}{4x^4}} \to \infty$ при $x \to 0$.

Покажем, что при дополнительном требовании *дифференцируемости* функций $u(x, y)$, $v(x, y)$ в точке z выполнение условий Коши–Римана является и *достаточным* для моногенности функции $f(z) = u + iv$ в точке z.

Действительно, в силу дифференцируемости функций $u(x, y)$, $v(x, y)$ в точке $z = x + iy$ имеем

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + o_1(\rho),\ \Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + o_2(\rho), \qquad (16)$$

где $\rho = |\Delta z| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, а $o_1(\rho)$ и $o_2(\rho)$ – бесконечно малые функции высшего порядка малости, чем ρ, т.е. $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{o_i(\rho)}{\rho} = 0$ $(i = 1, 2)$. Поэтому, учитывая, что $o_1(\rho) + io_2(\rho) = o(\rho)$ $(\rho \to 0)$, имеем (в силу (14))

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right)}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{o(\rho)}{\Delta z} =$$

$$= \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) + \frac{\partial v}{\partial x}(i\Delta x - \Delta y)}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{o(\rho)}{\rho}\cdot\frac{\rho}{\Delta z} =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + o(1),$$

так как $\left|\frac{\rho}{\Delta z}\right| = \frac{\rho}{|\Delta z|} = 1$. Символ $o(1)$ означает бесконечно малую функцию при $\rho \to 0$. Таким образом,

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = f'(z),$$

что и требовалось доказать.

Из свойств пределов и определения (13) вытекает, что дифференцируемость $f(z)$ в точке z эквивалентна равенству

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z) + \alpha(\Delta z),\ \text{где } \alpha(\Delta z) \to 0 \text{ при } \Delta z \to 0.$$

Следовательно, существование производной равносильно соотношению

$$\Delta w = \Delta f = f'(z)\Delta z + \alpha(\Delta z)\Delta z. \tag{17}$$

Выражение $f'(z)\Delta z$ – главная линейная (относительно Δz) часть приращения Δf – называется *дифференциалом* функции $f(z)$ в точке z и обозначается через $df(z) = f'(z)\Delta z$. В частности, если $f(z) = z$, то $df = dz = \Delta z$, поэтому можно написать $df(z) = f'(z)dz$.

Если $\Delta z \to 0$, то из (17) следует, что $\Delta w \to 0$, а это означает: дифференцируемость в точке z влечет за собой непрерывность функции $f(z)$ в той же самой точке.

Однако нетрудно привести пример непрерывной и нигде не дифференцируемой функции, например $f(z) = \overline{z} = x - iy$. Нетрудно проверить, что условия Коши-Римана не выполняются ни в одной точке плоскости z.

Функция $f(z)$ называется *аналитической* в области E, если она моногенна в каждой точке области E.

Если мы будем говорить, что функция $f(z)$ аналитична в точке z, то под этим будем подразумевать, что она аналитична в некоторой окрестности этой точки.

Заметим, что все правила дифференцирования действительных функций действительного переменного переносятся на функции комплексного переменного.

Справедливы также теоремы о производной сложной и обратной функции. Приведем их без доказательства.

Теорема 2.1. *Если $w = f(z)$ является аналитической функцией в области E на плоскости z, причем в области ее значений D на плоскости w определена аналитическая функция $\zeta = \varphi(w)$, то функция $F(z) = \varphi[f(z)]$ является аналитической в области E, причем*

$$F'(z) = \varphi'[f(z)] \cdot f'(z).$$

Теорема 2.2. *Если $w = f(z)$ является аналитической функцией в области E, причем $|f'(z)| \neq 0$ в окрестности некоторой точки $z_0 \in E$, то в окрестности точки $w_0 = f(z_0)$ области D значений функции $f(z)$ определена обратная функция $z = \varphi(w)$, являющаяся аналитической функцией комплексной переменной w. При этом имеет место соотношение*

$$f'(z_0) = \frac{1}{\varphi'(w_0)}.$$

2.4. Дифференцирование элементарных функций

Убедимся в том, что производная константы равна нулю. Действительно, пусть $f(z) = c$, тогда $f'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{c-c}{\Delta z} = 0$.

Рассмотрим степенную функция $f(z) = z^n$, где n - целое.
При $n > 0$ по определению получаем

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{nz^{n-1}\Delta z + o(\Delta z)}{\Delta z} = nz^{n-1}.$$

При $n < 0$, пользуясь правилами дифференцирования, получаем

$$\left(\frac{1}{z^n}\right)' = \frac{-nz^{n-1}}{z^{2n}} = \frac{-n}{z^{n+1}}.$$

Функция z^n при $n \geq 0$ аналитическая на всей плоскости z, а при $n < 0$ всюду, за исключением точки $z = 0$.

Покажем, что функция $f(z) = e^z$ является аналитической на всей комплексной плоскости z. Для этого проверим выполнение условий Коши-Римана (14). Так как $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$, то $u(x, y) = e^x \cos y$ и $v(x, y) = e^x \sin y$. Таким образом:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Следовательно, в силу дифференцируемости функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ на всей плоскости z, функция e^z является аналитической на всей плоскости z. Вычислим производную:

$$(e^z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z.$$

Аналогично

$$(e^{\alpha z})' = \alpha e^{\alpha z},$$

где α - произвольная комплексная постоянная.

Пользуясь определениями функций и правилами дифференцирования, легко получить следующие формулы:

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z, \quad (\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z, \quad (\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z.$$

Для дифференцирования функций $w = \sqrt[n]{z}$ и $w = \operatorname{Ln} z$ воспользуемся теоремой о производной обратной функции

$$(\sqrt[n]{z})' = \frac{1}{(w^n)'} = \frac{1}{nw^{n-1}} = \frac{1}{nz^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{z}}{nz}.$$

Для функции и производной берется одинаковая ветвь $\sqrt[n]{z}$.

$$(\operatorname{Ln} z)' = \frac{1}{(e^w)'} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}.$$

Подчеркнем, что мы здесь вычислили производную не от многозначной функции $\operatorname{Ln} z$, а от ее определенной однозначной ветви, соответствующей некоторому k. Тот факт, что производная оказалась равной функции $\frac{1}{z}$, не зависящей от k, объясняется тем, что различные ветви функции $\operatorname{Ln} z$ отличаются на константу $2k\pi i$.

2.5. Сопряженные гармонические функции

Однозначная в области D действительная функция $u(x, y)$ действительных переменных x, y, обладающая непрерывными частными производными второго порядка и удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{18}$$

называется *гармонической* в D.

Дифференциальное уравнение с частными производными (18) называется *уравнением Лапласа*, а дифференциальный оператор $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ - *оператором Лапласа*.

Если гармонические в области D функции $u(x, y), v(x, y)$ связаны условиями Коши-Римана, то функция $v(x, y)$ называется *гармонически сопряжённой с функцией* $u(x, y)$.

В дальнейшем будет доказано, что аналитическая в области D функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ имеет в D производные всех порядков. В частности, как было показано выше, её производную первого порядка можно записать в виде

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{19}$$

Так как производная $f'(z)$ сама является аналитической в области D с функцией, то из (19) заключаем, что

$$f''(z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2},$$

откуда следует, что $\Delta u = 0$ и $\Delta v = 0$. Поскольку $f''(z)$ тоже аналитична в D, то частные производные второго порядка функций $u(x, y), v(x, y)$ непрерывны.

Это означает, что действительная и мнимая части аналитической в области D функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ – гармонические в D функции, а поскольку они удовлетворяют условиям Коши-Римана, то функция $v(x, y)$ является гармонически сопряжённой с $u(x, y)$.

Обратно, если $u(x, y)$ и $v(x, y)$ – произвольные гармонические в области D функции, причём $v(x, y)$ – гармонически сопряжённая с $u(x, y)$, то в силу условий Коши-Римана и дифференцируемости функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, вытекающей из непрерывности их частных производных первого порядка, функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналитична в области D.

Пусть теперь в односвязной области D задана произвольная гармоническая функция $u(x, y)$. В силу равенства $\Delta u = 0$ выражение

$$-\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy$$

есть полный дифференциал функции, которую мы обозначим через $v(x, y)$, причём

$$v(x, y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy + C,$$

где (x_0, y_0) – произвольная фиксированная, а (x, y) – переменная точка области D, C – произвольная действительная постоянная, а интеграл не зависит от лежащего в области D пути интегрирования. Очевидно, что функция $v(x, y)$ связана с $u(x, y)$ условиями Коши-Римана, поэтому частные производные первого порядка функции $v(x, y)$ непрерывны, а следовательно, $v(x, y)$ является мнимой частью аналитической в области D функции

$$f(z) = u(x, y) + i\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy + iC.$$

Таким образом, аналитическая в односвязной области D функция $f(z)$ определяется по её действительной части с точностью до произвольной аддитивной мнимой постоянной iC.

3. Интегрирование функций комплексного переменного

3.1. Определение интеграла. Основные свойства

На плоскости комплексного переменного z рассмотрим гладкую кривую Жордана Γ с началом в точке a и концом в точке b и заданную на ней непрерывную функцию $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Обозначим через $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, следующие друг за другом в положительном направлении фиксированные точки на кривой Γ, отличные от ее концов, и составим сумму

$$S = \sum_{k=0}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k, \tag{20}$$

где $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$ – некоторая точка дуги $\overset{\frown}{z_k z_{k+1}}$ кривой Γ, $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k$, $z_0 = a$, $z_{n+1} = b$.

Представляя сумму (20) в виде

$$S = S_1 + iS_2 = \sum_{k=0}^{n}[u(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k] +$$

$$+ i\sum_{k=0}^{n}[v(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k]$$

и устремляя n к ∞ при условии, что $\max\limits_{0\le k\le n} |\Delta z_k| \to 0$ при $n \to \infty$, в пределе получим криволинейные интегралы второго рода

$$\lim_{n\to\infty} S_1 = \int_\Gamma udx - vdy, \quad \lim_{n\to\infty} S_2 = \int_\Gamma vdx + udy,$$

существование которых в принятых предположениях относительно Γ и $f(z)$ доказывается в курсе математического анализа. Следовательно, в принятых предположениях существует предел суммы (20), который называется *интегралом от функции $f(z)$ по кривой Γ:*

$$\lim_{n\to\infty} S = \int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma udx - vdy + i\int_\Gamma vdx + udy. \tag{21}$$

Напомним, что упомянутый предел не зависит от выбора точек z_k, ζ_k.

Заметим, что если кривая Γ задана уравнением $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, то под $\int\limits_\Gamma f(z)dz$ можно также понимать интеграл

$$\int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)dt = \int_\alpha^\beta \mathfrak{Re}\{f[z(t)]z'(t)\}dt + i\int_\alpha^\beta \mathfrak{Im}\{f[z(t)]z'(t)\}dt.$$

Из (20) очевидно, что наряду с (21) существует и предел сумм $\sum\limits_{k=0}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k+1})$, который обозначают символом $\int\limits_{\Gamma^-} f(z)dz$, где знак «–» при Γ означает, что интегрирование по Γ происходит в отрицательном направлении. Ясно также, что

$$\int\limits_{\Gamma^-} f(z)dz = -\int\limits_{\Gamma} f(z)dz. \tag{22}$$

Из определения интеграла (21) непосредственно вытекают следующие его свойства:

1. Если $f_k(z), \quad k = 1, 2, \ldots, m,$ — определенные на Γ непрерывные функции и c_k — комплексные постоянные, то

$$\int\limits_{\Gamma} \left[\sum_{k=1}^{m} c_k f_k(z)\right] dz = \sum_{k=1}^{m} c_k \int\limits_{\Gamma} f_k(z)dz. \tag{23}$$

2. Если гладкая кривая Γ состоит из m кусков $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$, т.е. $\Gamma = \bigcup\limits_{k=1}^{m} \Gamma_k$, то

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{\Gamma_k} f(z)dz, \tag{24}$$

причем предполагается, что интегрирование по каждой дуге Γ_k происходит в направлении, порожденном направлением интегрирования на Γ.

Если кусочно-гладкая кривая Γ состоит из m гладких кривых Γ_k, то интеграл по кусочно-гладкой кривой и определяется равенством (24).

Заметим, что если граница многосвязной области D состоит из замкнутых кривых Жордана, то положительным направлением на границе $\partial D = \Gamma$ этой области считается направление, оставляющее область слева. Поэтому в случае, когда совокупность Γ попарно не пересекающихся замкнутых кусочно-гладких кривых $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ является границей $(m+1)$–связной области, причем $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$ лежат внутри Γ_0, можно написать $\partial D = \Gamma = \Gamma_0 \cup \left\{\bigcup\limits_{k=1}^{m} \Gamma_k^-\right\}$, и следовательно, для непрерывной на Γ функции $f(z)$ в силу (22) получим

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_{\Gamma_0} f(z)dz - \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{\Gamma_k} f(z)dz. \tag{25}$$

3. Наряду с непрерывной функцией $f(z)$ интегрируема и функция $|f(z)|$, причем в силу неравенства треугольника и определения длины кривой имеет

место неравенство

$$\left|\int\limits_{\Gamma} f(z)dz\right| \le \int\limits_{\Gamma} |f(z)|\cdot|dz| \le \max_{z\in\Gamma}|f(z)|\,L, \tag{26}$$

где L — длина кривой Γ.

4. Если заданная на Γ последовательность $\{f_n(z)\}, n = 1, 2, \ldots,$ непрерывных функций равномерно сходится на Γ к $f(z)$, то функция $f(z)$ интегрируема (ибо непрерывна) и

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\Gamma} f_n(z)dz = \int\limits_{\Gamma} f(z)dz. \tag{27}$$

В самом деле, в силу равномерной сходимости последовательности $\{f_n(z)\}$ на Γ для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $N = N(\varepsilon) > 0$, что $|f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{L}$ для всех $z \in \Gamma$ и $n > N$. Поэтому на основании (23) и (26) имеем

$$\left|\int\limits_{\Gamma} f_n(z)dz - \int\limits_{\Gamma} f(z)dz\right| = \left|\int\limits_{\Gamma}[f_n(z)dz - f(z)]dz\right| \le$$

$$\le \int\limits_{\Gamma}|f_n(z) - f(z)|\cdot|dz| < \varepsilon \quad \text{при } n > N,$$

что и доказывает справедливость равенства (27).

В частности, если функциональный ряд $f(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ непрерывных на Γ функций $f_k(z)$ равномерно сходится на Γ, то это означает, что последовательность его частичных сумм $S_n(z)$ равномерно сходится на Γ. Следовательно, в силу (27) и (23) имеем

$$\int\limits_{\Gamma}\left[\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)\right]dz = \lim_{n\to\infty}\int\limits_{\Gamma}\left[\sum_{k=1}^{n} f_k(z)\right]dz =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\Gamma} f_k(z)dz = \sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{\Gamma} f_k(z)dz,$$

т. е. получаем возможность почленного интегрирования равномерно сходящегося на Γ ряда непрерывных на этой кривой функций $f_k(z)$.

Теорема 3.1. *(Коши). Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D и γ - любая замкнутая кусочно-гладкая кривая Жордана, лежащая в D, то*

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Доказательство проведем только в предположении, что производная аналитической функции $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ является непрерывной в области D. Тогда функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ являются непрерывно дифференцируемыми и удовлетворяют условиям Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

в силу которых выражения $vdx + udy$ и $udx - vdy$ являются полными дифференциалами некоторых функций. Так как криволинейные интегралы по замкнутой кривой γ от этих выражений равны нулю то, согласно равенству (21), получаем

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{\gamma} udx - vdy + i\int\limits_{\gamma} vdx + udy = 0.$$

Следствие. *Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D, то значение интеграла $\int\limits_{\gamma} f(z)dz$, взятого вдоль любой кусочно-гладкой кривой Жордана γ, лежащей в D, не зависит от кривой γ, а определяется лишь положениями начальной и конечной точек этой кривой.*

Для многосвязных областей теорема Коши, вообще говоря, не верна. В самом деле, функция $f(z) = \frac{1}{z}$ аналитична всюду в кольце $\frac{1}{2} < |z| < 2$, однако интеграл вдоль окружности $|z| = 1$ не равен нулю. Действительно, вдоль окружности $|z| = 1$, где $z = e^{i\varphi}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ (начало пути в точке $z = 1$), имеем:

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z} = \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{ie^{i\varphi}d\varphi}{e^{i\varphi}} = 2\pi i.$$

В теореме Коши речь идет об интеграле по замкнутой кривой Жордана, лежащей внутри области аналитичности функции. Между тем, иногда приходится рассматривать интегралы вдоль кривых, на которых функция, оставаясь непрерывной, перестает быть аналитической. Оказывается, теорема Коши остается верна и для этого случая.

Теорема 3.2. *(Обобщенная теорема Коши). Если функция $f(z)$ аналитична в области $D \subset \mathbb{C}$, ограниченной замкнутой кусочно-гладкой кривой Жордана Γ, и непрерывна в $\overline{D}$, то*

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = 0.$$

Обобщенная теорема Коши верна и для многосвязной области.

Теорема 3.3. *Если функция $f(z)$ аналитична в $(m+1)$-связной области D, граница Γ которой состоит из попарно не пересекающихся замкнутых кусочно-гладких кривых Жордана $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$, где Γ_0 содержит внутри себя все остальные кривые, и непрерывна в $\overline{D}$, то*

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_{\Gamma_0} f(z)dz - \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{\Gamma_k} f(z)dz = 0. \tag{28}$$

Доказательство. Обозначим через σ_k, $k = 0, 1, \ldots, m$, не пересекающиеся гладкие открытые дуги Жордана, лежащие в D и соединяющие соответственно Γ_k с Γ_{k+1}, $\Gamma_{m+1} = \Gamma_0$. Проведенными вдоль разрезами область D разбивается на две односвязные области D' и D'' с кусочно-гладкими жордановыми границами Γ' и Γ'' соответственно. В силу очевидного равенства

$$\int\limits_{\Gamma'} f(z)dz + \int\limits_{\Gamma''} f(z)dz = \int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_{\Gamma_0} f(z)dz - \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{\Gamma_k} f(z)dz$$

и обобщенной теоремы Коши для функции $f(z)$ в областях $\overline{D}'$ и $\overline{D}''$ и получаем (28).

3.3. Теорема Морера. Понятие неопределенного интеграла

Теорема 3.4. *(Морера). Если функция $f(z)$ непрерывна в области D и для любой замкнутой кусочно-гладкой жордановой кривой γ, лежащей в D,*

$$\int\limits_{\gamma} f(t)dt = 0, \tag{29}$$

то функция аналитична в D.

Доказательство. Пусть σ — кусочно-гладкая кривая Жордана, соединяющая точки $z_0 \in D$ и $z \in D$ и лежащая в области D. Условие (29) означает, что $\int\limits_{\sigma} f(t)dt$ *не зависит от пути интегрирования*, а только от его начала и конца и, следовательно, при фиксированном $z_0 \in D$ можно написать

$$\int\limits_{\sigma} f(t)dt = \int\limits_{z_0}^{z} f(t)dt = F(z). \tag{30}$$

Вследствие (29) для z и $z+\Delta z$ из области D в силу (30), (22) и (24) получим также равенство

$$F(z+\Delta z)-F(z)=\int\limits_{z_0}^{z+\Delta z} f(t)dt-\int\limits_{z_0}^{z} f(t)dt=\int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(t)dt.$$

В силу непрерывности $f(z)$ для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что $C(\delta,z)\subset D$ и $|f(t)-f(z)|<\varepsilon$ для всех $t\in C(\delta,z)$. Поэтому, предполагая $|\Delta z|<\delta$, из очевидного равенства

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)=\frac{1}{\Delta z}\int\limits_{z}^{z+\Delta z}[f(t)-f(z)]dt,$$

где интегрирование происходит вдоль прямолинейного отрезка, соединяющего точки z и $z+\Delta z$ и лежащего в области D, будем иметь

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|<\varepsilon,$$

откуда следует аналитичность функции $F(z)$ и равенство

$$F'(z)=f(z),\qquad z\in D. \tag{31}$$

Поскольку по доказанному выше $F(z)$ имеет производные всех порядков, то и функция $f(z)=F'(z)$ имеет производную в любой точке области D, т.е. $f(z)$ аналитична в D.

Совокупность аналитических в области D функций $\Phi(z)$, обладающих тем свойством, что

$$\Phi'(z)=f(z), \tag{32}$$

где $f(z)$ — аналитическая в области D функция, называется *неопределенным интегралом от функции* $f(z)$.

Полагая $\Phi(z)-F(z)=U(x,y)+iV(x,y)$, в силу (31) и (32) будем иметь

$$\Phi'(z)-F'(z)=[U(x,y)+iV(x,y)]'=U_x+iV_x=V_y-iU_y=0,$$

откуда получаем, что $U_x=U_y=V_x=V_y=0$ всюду в D. Следовательно, $\Phi(z)-F(z)=C=const$ в области D. Таким образом, в силу (30) имеем равенство

$$\Phi(z)=\int\limits_{z_0}^{z} f(t)dt+C,$$

откуда, ввиду того, что $C=\Phi(z_0)$, следует *формула Лейбница*

$$\int\limits_{z_0}^{z} f(t)dt=\Phi(z)-\Phi(z_0).$$

3.4. Интегральная формула Коши

Доказанная выше теорема Коши влечет за собой ряд важных следствий. В частности, позволяет установить определенную связь между значениями аналитической функции во внутренних точках области ее аналитичности и граничными значениями этой функции.

Теорема 3.5. *Пусть функция $f(z)$ аналитична в области $D \subset \mathbb{C}$ с кусочно-гладкой границей Γ и непрерывна в $\overline{D}$. Тогда*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(z)dz}{z - z_0}. \tag{33}$$

Доказательство. Удалим из области D круг $C(r, z_0)$ такой, что $\overline{C(r, z_0)} \subset D$, и обозначим через γ_r окружность $|z - z_0| = r$, ориентированную против часовой стрелки. Заметим, что в полученной области $D_r = D \backslash \overline{C(r, z_0)}$ функции $\frac{f(z)}{z - z_0}$ является аналитической относительно переменного z. А так как она непрерывна в $\overline{D}_r$, то по обобщенной теореме Коши получаем

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{f(z)dz}{z - z_0} = \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(z)dz}{z - z_0}. \tag{34}$$

Для $z \in \gamma_r$ имеем $z = z_0 + re^{i\varphi}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad dz = ire^{i\varphi} d\varphi$, поэтому, вынося за знак интеграла постоянный относительно z множитель $f(z_0)$, получим:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(z_0)dz}{z - z_0} = \frac{f(z_0)}{2\pi i} \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{ire^{i\varphi} d\varphi}{re^{i\varphi}} = f(z_0). \tag{35}$$

На основании формул (34) и (35) имеем:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(z)dz}{z - z_0} - f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz. \tag{36}$$

Оценим эту разность. Согласно неравенству (26) и непрерывности функции $f(z)$ в области D получаем

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma_r} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| |dz| \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi} \max_{\gamma_r} |f(z) - f(z_0)| \frac{2\pi r}{r} = \max_{0 \le \varphi \le 2\pi} |f(z_0 + re^{i\varphi}) - f(z_0)| \underset{r \to 0}{\longrightarrow} 0,$$

откуда видно, что наша разность при уменьшении r может быть сделана сколь угодно малой. С другой стороны, как видно из левой части (36), эта разность не зависит от r. Следовательно, рассматриваемая разность равна нулю и верно равенство (33), которое называется *интегральной формулой Коши*. Интеграл в этой формуле называют *интегралом Коши*.

Замечание 1. Формула Коши имеет место и для многосвязной области D.

Замечание 2. Если в условиях теоремы точка z_0 лежит вне $\overline{D}$, то функция $\frac{f(z)}{z-z_0}$ переменного z является аналитической в D и непрерывной в $\overline{D}$. Далее, применяя обобщенную теорему Коши, получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(z)dz}{z-z_0}=0.$$

3.5. Интегралы, зависящие от параметра

Рассматривая интеграл Коши, мы видим, что подынтегральная функция зависит от двух комплексных переменных: переменной интегрирования z и фиксированного значения переменной z_0. Тем самым интеграл Коши является интегралом, зависящим от параметра z_0. Рассмотрим вопрос о существовании общих свойств интегралов по комплексной переменной, зависящих от параметра.

Пусть задана функция двух комплексных переменных $\varphi(z,t)$ однозначно определенная для значений z из некоторой области E и для t, принадлежащих некоторой кусочно-гладкой кривой Γ.

Тогда интеграл от функции $\varphi(z,t)$ по кривой Γ существует для любого $z\in E$ и является функцией комплексной z:

$$F(z)=\int\limits_{\Gamma}\varphi(z,t)dt.$$

В условиях, приведенных выше, легко доказывается следующая теорема.

Теорема 3.6. *Пусть функция $\varphi(z,t)$ является аналитической функцией в E при любом значении $t\in\Gamma$ и, вместе со своей производной $\frac{\partial\varphi}{\partial z}(z,t)$, непрерывной на множестве изменения своих переменных. Тогда функция $F(z)$-аналитическая в E, причем*

$$F'(z)=\int\limits_{\gamma}\frac{\partial\varphi}{\partial z}(z,t)dt.$$

Замечание. Если $\frac{\partial\varphi}{\partial z}(z,t)$ как функция от двух комплексных переменных снова удовлетворяет условиям теоремы, то $F'(z)$ также является аналитической функцией в области E.

3.6. Высшие производные

Рассмотренное выше свойство интегралов, зависящих от параметра, позволяет установить важное свойство аналитических функций.

Теорема 3.7. *Пусть функция $f(z)$ является аналитической в области D и непрерывной в $\overline{D} = D \cup \Gamma$. Тогда в каждой точке $z \in D$ существует производная любого порядка функции $f(z)$, причем n-я производная представляется формулой*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)dt}{(t-z)^{n+1}}. \tag{37}$$

Доказательство. Рассмотрим в D некоторую замкнутую подобласть $\overline{D}_1$, причем $\rho(\overline{D}_1, \Gamma) \geq d > 0$. Функция

$$\varphi(z,t) = \frac{f(t)}{t-z}$$

является аналитической относительно z в D_1 для любого $t \in \Gamma$. Причем ее частная производная $\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{f(t)}{(t-z)^2}$ в этой области является непрерывной функцией своих аргументов. Таким образом, выполнены все условия теоремы (3.6). Следовательно,

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)dt}{(t-z)^2}.$$

В полученном интеграле подынтегральная функция опять обладает всеми необходимыми свойствами для применения теоремы (3.6). Повторяя наши рассуждения соответствующее число раз и учитывая, что для любой точки $z \in D$ можно построить соответствующую замкнутую подобласть $\overline{D}_1$, получим формулу (37).

4. Ряды аналитических функций

4.1. Функциональные ряды

Напомним известные из анализа простейшие понятия, связанные с рядами. Будем говорить, что функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z), \tag{38}$$

членами которого являются функции $f_k(z)$, определенные на некотором множестве $E \subset \mathbb{C}$, сходится на множестве E, если он сходится в каждой точке $z \in E$. Пусть сумма этого ряда равна $S(z)$, а $S_n(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(z)$.

Функциональный ряд (38)называется равномерно сходящимся на E, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $N = N(\varepsilon)$, что $|S(z) - S_n(z)| < \varepsilon$ для всех $n > N$ и $z \in E$.

Теорема 4.1. *(Признак Вейерштрасса). Если для всех $z \in E$ каждый член $f_k(z)$ ряда (38), начиная с некоторого номера n_0, удовлетворяет неравенству*

$$|f_k(z)| \leq a_k, \ \ k = n_0, n_0 + 1, ..., \tag{39}$$

и числовой ряд $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_k$ сходится, то ряд (38) сходится равномерно (и абсолютно) на множестве E.

Доказательство. Действительно, в силу сходимости ряда $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_k$ для для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $N = N(\varepsilon)$, что $\sum\limits_{k=1}^{m} a_{n+k} < \varepsilon$ для любого натурального числа m и любого $n > N$. Далее, в силу (39) имеем

$$\left| \sum_{k=1}^{m} f_{n+k}(z) \right| \leq \sum_{k=1}^{m} |f_{n+k}(z)| \leq \sum_{k=1}^{m} a_{n+k} < \varepsilon, \tag{40}$$

откуда на основании критерия Коши убеждаемся в равномерной и абсолютной сходимости ряда (38) на множестве E.

Отметим следующее важное свойство суммы равномерно сходящегося функционального ряда.

Теорема 4.2. *Сумма $S(z)$ равномерно сходящегося на множестве E ряда (38) непрерывных на этом множестве функций $f_k(z)$ непрерывна на множестве E.*

Доказательство. В самом деле, пусть z_0 - произвольная фиксированная точка множества E. Тогда для $z \in E$ имеем

$$|S(z) - S(z_0)| \leq |S(z) - S_N(z)| + |S_N(z) - S_N(z_0)| + |S_N(z_0) - S(z_0)|.$$

По заданному $\varepsilon > 0$ в силу равномерной сходимости ряда (38) найдется такое натуральное число $N = N(\varepsilon)$, что первое и третье слагаемые правой части этого неравенства будут меньше $\frac{\varepsilon}{3}$, а затем, при фиксированном N, в силу непрерывности $S_N(z)$ как суммы конечного числа непрерывных функций $f_k(z)$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon, z_0) > 0$, что при $|z - z_0| < \delta$ и второе слагаемое будет меньше $\frac{\varepsilon}{3}$. В итоге получим, что $|S(z) - S(z_0)| < \varepsilon$, как только $|z - z_0| < \delta$, что означает непрерывность $S(z)$ в точке z_0, а значит, в силу произвольности точки $z_0 \in E$, и на множестве E.

Теорема Вейерштрасса о рядах аналитических функций. Будем говорить, что некоторое свойство имеет место *внутри области*, если оно имеет место *на любом замкнутом множестве этой области.*

Из математического анализа известно, что сумма $f(x)$ равномерно сходящегося в интервале $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ дифференцируемых функций может оказаться не дифференцируемой, а при наличии производной $f'(x)$ совсем не обязательно, чтобы $f'(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$. В отличие от этого в комплексном анализе имеет место следующее утверждение.

Теорема 4.3. *(теорема Вейерштрасса). Если ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) \tag{41}$$

аналитических в области D функций $f_k(z)$ равномерно сходится внутри области D, то сумма $f(z)$ этого ряда аналитична в D, причем

$$f^{(p)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(p)}(z) \tag{42}$$

для любого натурального p и ряд (42) *равномерно сходится внутри области D.*

Примечание. Теорему Вейерштрасса можно сформулировать и для последовательности аналитических функций: *если последовательность аналитических в области D функций $f_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, равномерно сходится внутри D к $f(z)$*, то функция $f(z)$ аналитична в области D, причем последовательность производных $f_n^{(p)}$ равномерно сходится к производной $f^{(p)}(z)$, $p = 1, 2, \ldots$.

4.2. Степенные ряды

При изучении степенных рядов, не ограничивая общности, можно ограничиться рассмотрением рядов вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \tag{43}$$

где c_k - заданные комплексные числа, так как общий случай степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$ приводится к ряду вида (43) простой заменой переменного.

Теорема 4.4. *(Коши-Адамара). Пусть* $l = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|}$. *Тогда при* $l = 0$ *ряд (43) абсолютно сходится на всей комплексной плоскости, при* $l = \infty$ *он сходится только в точке* $z = 0$, *а в случае, когда* $0 < l < \infty$, *ряд (43) абсолютно сходится в круге* $|z| < \frac{1}{l}$ *и расходится при* $|z| > \frac{1}{l}$.

Доказательство. Сначала заметим, что для $z = 0$ утверждение теоремы верно при любых коэффициентах c_k, а следовательно, при любом l. Рассмотрим теперь отдельно каждый из указанных трех случаев для $z \neq 0$.

1) $l = 0$. Это означает, что

$$l = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}$$

и, следовательно, для любого конечного z имеем

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k z^k|} = |z| \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0.$$

В силу признака Коши сходимости рядов с положительными членами ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k z^k|$ сходится при любом конечном z, т.е. ряд (43) абсолютно сходится на всей комплексной плоскости.

2) $l = \infty$. Если бы ряд (43) сходился при некотором $z \neq 0$, то в силу необходимого условия его сходимости можно было бы указать такое число $M > 1$, что $|c_k z^k| < M$ или $\sqrt[k]{|c_k|} < \frac{M}{|z|}$, $k = 1, 2, ...$, что невозможно, ибо условие $l = \infty$ означает, что последовательность $\{\sqrt[k]{|c_k|}\}$ не ограничена.

3) $0 < l < \infty$. Пусть $0 < |z| < \frac{1}{l}$. По определению верхнего предела для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число N, что $\sqrt[k]{|c_k|} < l + \varepsilon$ при $k > N$. Положив $\varepsilon = \frac{1-l|z|}{2|z|}$, получим

$$\sqrt[k]{|c_k|} < l + \frac{1-l|z|}{2|z|} = \frac{1+l|z|}{2|z|},$$

или

$$|z|\sqrt[k]{|c_k|} < \frac{1+l|z|}{2} = q < 1, \tag{44}$$

так как $l|z| < 1$. Возведя обе части неравенства (44) в степень k, получим

$$|z|^k|c_k| \text{ или } |c_k z^k| < q^k, \text{ при } k > N. \tag{45}$$

Так как ряд с общим членом $q^k, q < 1$ сходится, то в силу (45) абсолютно сходится ряд (43) при $|z| < \frac{1}{l}$.

Пусть теперь $|z| > \frac{1}{l}$. По определению верхнего предела для любого $\varepsilon > 0$ существует бесконечное множество индексов $k_n, n = 1, 2, ...$, для которых $\sqrt[k_n]{|c_{k_n}|} > l - \varepsilon$. Положив теперь $\varepsilon = \frac{l|z|-1}{|z|}$, будем иметь $|z| \sqrt[k_n]{|c_{k_n}|} > 1$ и, следовательно, $|c_{k_n} z^{k_n}| > 1$. Отсюда заключаем, что при $|z| > \frac{1}{l}$ не выполняется необходимое условие сходимости ряда (43), т.е. он расходится.

Теорема 4.5. *(Абеля). Если ряд (43) сходится в точке* $z_0 \neq 0$*, то он абсолютно сходится в круге* $|z| < |z_0|$.

Доказательство. В самом деле, из условия теоремы и теоремы Коши-Адамара следует, что $|z_0| \leq \frac{1}{l}$, и по теореме Коши-Адамара ряд (43) абсолютно сходится при $|z| < |z_0| \leq \frac{1}{l}$.

Круг $|z| < \frac{1}{l}$, внутри которого степенной ряд (43) абсолютно сходится, а вне его замыкания - расходится, называется *кругом сходимости*, а число

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|}} \tag{46}$$

- *радиусом сходимости* этого ряда. Равенство (46) называется *формулой Коши-Адамара.*

Степенной ряд, вообще говоря, не сходится равномерно в своем круге сходимости $|z| < R$, что показывает пример ряда

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$$

с единичным кругом сходимости. Поскольку для этого ряда

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z},$$

то при любом n имеем

$$S(z) - S_n(z) = \frac{z^{n+1}}{1-z} \text{ и } \sup_{|z|<1} |S(z) - S_n(z)| = \sup_{|z|<1} \frac{|z|^{n+1}}{|1-z|} = \infty.$$

Однако степенной ряд (43) *равномерно сходится* в любом замкнутом круге $|z| \leq r < R$, так как мажорируется в нем сходящимся числовым рядом $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k| r^k$.

Следствие. Из теорем Вейерштрасса и Абеля следует, что сумма любого степенного ряда в круге его сходимости является аналитической функцией.

В случае, когда $0 < R < \infty$, на окружности $|z| = R$ - границе круга сходимости - степенной ряд (43) может:

а) расходиться во всех ее точках;

б) в одних ее точках сходиться, а в других расходиться;

в) сходиться (и даже абсолютно и равномерно) на всей границе круга сходимости.

Для примера рассмотрим следующие ряды

$$\text{а) } \sum_{k=0}^{\infty} z^k, \text{ б) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}, \text{ в) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}.$$

Кругом сходимости всех трех рядов является единичный круг $\{|z| < 1\}$, т.е. $R = 1$. Ряд а) расходится во всех точках окружности $\{|z| = 1\}$, ибо его общий член при $|z| = 1$ не стремится к нулю. Ряд б) в некоторых точках окружности $\{|z| = 1\}$ сходится (например, в $z = -1$), а в некоторых расходится (например, в $z = 1$). Ряд в) сходится во всех точках этой окружности (причем абсолютно и равномерно), ибо для любого z, $|z| = 1$, он мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

4.3. Ряд Тейлора

Выше было показано, что сумма $S(z)$ степенного ряда является аналитической функцией в его круге сходимости. Имеет место и обратное утверждение.

Теорема 4.6. *(Тейлора). Аналитическая в области D функция $f(z)$ в окрестности каждой точки $z_0 \in D$ единственным образом представима в виде степенного ряда*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \tag{47}$$

радиус сходимости которого не меньше, чем расстояние ρ от точки z_0 до границы области D.

Доказательство. В круге $C(\delta, z_0)$, $0 < \delta < \rho$, с границей γ в силу интегральной формулы Коши имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(t)dt}{t - z} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(t)dt}{(t - z_0)\left(1 - \frac{z - z_0}{t - z_0}\right)}. \tag{48}$$

Ввиду того, что для каждой фиксированной точки $z \in C(\delta, z_0)$ и $t \in \gamma$ имеет место соотношение

$$\left|\frac{z - z_0}{t - z_0}\right| = \frac{|z - z_0|}{\delta} = q(z) < 1,$$

а функция $\frac{f(t)}{t - z_0}$ ограничена на окружности γ, по признаку Вейерштрасса ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{t - z_0}\right)^k \frac{f(t)}{t - z_0} = \frac{f(t)}{(t - z_0)\left(1 - \frac{z - z_0}{t - z_0}\right)}$$

сходится равномерно на γ и, следовательно, равенство (48) можно переписать в виде

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^k \frac{f(t)dt}{t-z_0} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f(t)dt}{(t-z_0)^{k+1}} (z-z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k,$$

где

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f(t)dt}{(t-z_0)^{k+1}}, \tag{49}$$

или, принимая во внимание формулу (37),

$$c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots . \tag{50}$$

Так как коэффициенты c_k в силу (49) и теоремы Коши для функции $\frac{f(z)}{z-z_0}$ одни и те же для любого δ, $0 < \delta < \rho$, то радиус сходимости ряда (47) не меньше ρ.

Ряд (47), коэффициенты которого определяются для аналитической функции $f(z)$ по формулам (49) или (50), называется *рядом Тейлора* (разложением Тейлора) функции $f(z)$.

Из (50) следует, что разложение аналитической функции $f(z)$ в ряд Тейлора единственно, таким образом, можно сказать, что найденное любым способом разложение аналитической функции $f(z)$ в степенной ряд является тейлоровским разложением этой функции.

Отметим простые следствия данной теоремы.

Неравенство Коши. Пусть аналитическая в круге $C(R, z_0)$ функция $f(z)$ ограничена, т.е. существует такое число $M > 0$, что

$$|f(z)| < M, \quad z \in C(R, z_0). \tag{51}$$

Тогда по теореме Тейлора функция $f(z)$ в круге $C(R, z_0)$ представляется рядом (47) с коэффициентами c_k, определенными по формулам (49), в которых в качестве γ взята окружность $|t - z_0| = \delta$, $0 < \delta < R$. Из (49) в силу (51) следует, что

$$|c_k| < \frac{M}{2\pi} \frac{2\pi\delta}{\delta^{k+1}} = \frac{M}{\delta^k}. \tag{52}$$

Так как последнее неравенство справедливо для всех $\delta < R$, то в пределе $\delta \to R$ получаем *неравенства Коши*:

$$|c_k| \le \frac{M}{R^k}, \quad k = 0, 1, \ldots . \tag{53}$$

Непосредственным следствием неравенств Коши является следующее утверждение.

Теорема 4.7. *(Лиувиля). Если функция $f(z)$ аналитична на всей комплексной плоскости и $|f(z)| < M < \infty$, $z \in \mathbb{C}$, то $f(z) = const$.*

В самом деле, в силу условия разложения функции $f(z)$ в ряд Тейлора по степеням z сходится на всей комплексной плоскости, в частности, в любом круге $C(R, 0)$. Устремляя R к ∞ в неравенствах (53), получим $c_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, и, стало быть, $f(z) = c_0 = const$.

Таким образом, два свойства функции - быть аналитической на всей плоскости $\mathbb{C}$ и быть ограниченной - могут сосуществовать лишь на тривиальных функциях (постоянных).

5. Единственность определения аналитической функции

Ранее мы видели, что аналитическая функция полностью определяется своими значениями на границе области аналитичности. Здесь, в дополнение к этому, мы покажем, что аналитическая функция полностью определяется своими значениями на произвольной последовательности точек, сходящейся к некоторой внутренней точке области аналитичности.

5.1. Нули аналитической функции

Нулем функции $f(z)$ называется любая точка $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$, в которой эта функция равна нулю, т.е. корень уравнения $f(z) = 0$.

Если аналитическая функция $f(z)$ не равна тождественно 0 в окрестности своего нуля z_0, то при разложении ее в ряд Тейлора с центром в z_0 все коэффициенты c_k не могут равняться нулю (иначе сумма ряда была бы тождественно равна нулю). Номер младшего отличного от нуля коэффициента этого разложения называется порядком нуля z_0. Таким образом, в окрестности нуля порядка m тейлоровское разложение функции имеет вид:

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad m \geq 1, c_m \neq 0. \tag{54}$$

Из равенства (50) следует, что z_0 является нулем аналитической функции $f(z)$ порядка m тогда и только тогда, когда $f^{(k)}(z_0) = 0$ при $k = 0, 1, \ldots, m-1$ и $f^{(m)}(z_0) \neq 0$. При $m = 1$ нуль называется *простым.*

Очевидно также, что в окрестности нуля порядка m аналитическая функция $f(z)$ допускает представление в виде

$$f(z) = (z - z_0)^m \cdot \varphi(z),$$

где функция

$$\varphi(z) = c_m + c_{m+1}(z - z_0) + c_{m+2}(z - z_0)^2 \ldots$$

также аналитична в окрестности точки z_0 (ибо она представляется сходящимся степенным рядом).

Так как $\varphi(z_0) = c_m \neq 0$, то в силу непрерывности этой функции $\varphi(z) \neq 0$ в некоторой окрестности z_0.

Таким образом, верна следующая

Теорема 5.1. *Пусть функция $f(z)$ аналитична в окрестности своего нуля z_0 и не равна тождественно 0 ни в какой его окрестности. Тогда существует окрестность точки z_0, в которой $f(z)$ не имеет других нулей, кроме z_0.*

5.2. Теорема единственности

Под внутренней теоремой единственности аналитической функции понимается следующее утверждение.

Теорема 5.2. *Если аналитические в области D функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ равны между собой на множестве $E \in D$, имеющем по крайней мере одну предельную точку $z_0 \in D$, то $f(z) = \varphi(z)$ всюду в D.*

Доказательство. Действительно, в силу условия существует последовательность $\{z_n\}$ точек $z_n \in E$, сходящаяся к точке z_0 и такая, что

$$f(z_n) = \varphi(z_n), n = 1, 2, \dots \, . \tag{55}$$

По теореме Тейлора в круге $C(\delta, z_0) \subset D$ функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ разлагаются в степенные ряды

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad \varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c'_k (z - z_0)^k. \tag{56}$$

Начиная с некоторого номера N все точки z_n лежат в круге $C(\delta, z_0)$. Переходя в равенствах (55), в которых функции f и φ заменены рядами (56) при $z = z_n$, $n \geq N$, к пределу при $n \to \infty$, получаем $c_0 = c'_0$.

Следовательно, для всех точек z_n, $n \geq N$, имеем также

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k (z_n - z_0)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} c'_k (z_n - z_0)^{k-1},$$

откуда в пределе при $n \to \infty$ получим $c_1 = c'_1$. Продолжая этот процесс, приходим к заключению, что $c_k = c'_k$ для всех номеров k и, стало быть, $f(z) = \varphi(z)$ всюду в круге $C(\delta, z_0)$. В силу непрерывности функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ они равны также на множестве $\overline{C(\delta, z_0)} \cap D$.

Пусть теперь z_* — любая точка области D, лежащая вне круга $\overline{C(\delta, z_0)}$. Соединим точку z_0 и z_* гладкой кривой σ, $\sigma \subset D$, и обозначим через z_1 ее последнюю точку пересечения с окружностью $|z - z_0| = \delta$. Повторяя приведенное выше рассуждение, докажем, что $f(z) = \varphi(z)$ в круге $C(\rho, z_1)$, где ρ равно расстоянию между σ и границей области D. Обозначим теперь через z_2 последнюю точку пересечения дуги $\overset{\frown}{z_1 z_*}$ кривой σ с окружностью $|z - z_1| = \rho$ и аналогично докажем, что $f(z) = \varphi(z)$ в круге $C(\rho, z_2)$. Продолжая действовать таким образом, придем к кругу $C(\rho, z_m)$, $z_m \in \sigma$, содержащему точку z_*, в котором $f(z) = \varphi(z)$, а следовательно, и $f(z_*) = \varphi(z_*)$. В силу произвольности точки z_* отсюда заключаем, что $f(z) = \varphi(z)$ всюду в области D.

Из теоремы единственности вытекают следующие важные следствия.

Следствие 1. Аналитическая и не равная тождественно нулю в области D функция $f(z)$ не может обращаться в нуль ни в какой подобласти из D, ни на какой кривой, лежащей в D, ни даже на последовательности точек из D, сходящейся к ее внутренней точке.

Однако легко привести пример, когда бесконечная последовательность нулей функции сходится к граничной точке ее области аналитичности. Например, функция $f(z) = \sin\frac{1}{z}$ обращается в нуль на последовательности точек $z_n = \frac{1}{\pi n}(n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$, сходящейся к точке $z = 0$.

Следствие 2. В области D может существовать лишь единственная аналитическая функция $f(z)$, принимающая заданные значения в последовательности точек $\{z_n\}$, сходящейся к точке $a \in D$.

Следствие 3. Если аналитические в области D функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ совпадают на некоторой кривой L, принадлежащей данной области, то они тождественно равны в области D.

Следствие 4. Если функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$, аналитические соответственно в областях D_1 и D_2, имеющих общую подобласть D, совпадают в D, то существует единственная аналитическая функция $F(z)$ такая, что

$$F(z) \equiv \begin{cases} f_1(z), & z \in D_1; \\ f_2(z), & z \in D_2. \end{cases}$$

6. Ряды Лорана и изолированные особые точки

Ряды Тейлора – это удобный аппарат для представления аналитических функций в круговых областях и изучения их свойств. Весьма важно, однако, иметь аппарат для представления функций, аналитических в кольцевых областях $r < |z - z_0| < R$, где $0 \le r < R \le \infty$. Особенно важны при этом разложения в проколотых окрестностях, т.е. в кольцах с нулевым внутренним радиусом. Эти разложения позволяют изучать свойства аналитических функций в окрестности их особых точек, т.е. точек, в которых они теряют аналитичность.

6.1. Ряд Лорана

Теорема 6.1. *(Лорана). Любая аналитическая в кольце $K = \{z : r < |z - z_0| < R\}$ функция $f(z)$ однозначно представляется в этом кольце в виде сходящегося ряда*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \tag{57}$$

коэффициенты которого определяются по формуле

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(t)dt}{(t - z_0)^{k+1}}, \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \tag{58}$$

где γ – любая окружность $|t - z_0| = \rho$, $r < \rho < R$, ориентированная против часовой стрелки.

Доказательство. Пусть z — произвольная точка кольца K. Построим кольцо $K' = \{z : r' < |z - z_0| < R'\}$ такое, что $z \in K' \subset K$. По интегральной формуле Коши для $z \in K'$ имеем

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma' \cup \gamma'^-} \frac{f(t)dt}{t - z} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma'} \frac{f(t)dt}{(t - z_0)\left(1 - \frac{z - z_0}{t - z_0}\right)} + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma'} \frac{f(t)dt}{(z - z_0)\left(1 - \frac{t - z_0}{z - z_0}\right)}, \end{aligned} \tag{59}$$

где окружности $\Gamma' = \{|t - z_0| = R'\}$ и $\gamma' = \{|t - z_0| = r'\}$ ориентированы против часовой стрелки. По признаку Вейерштрасса при каждом фиксированном $z \in K'$ ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{t - z_0}\right)^k \frac{f(t)}{t - z_0} \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t - z_0}{z - z_0}\right)^k \frac{f(t)}{z - z_0} = \sum_{k=-1}^{-\infty} \left(\frac{z - z_0}{t - z_0}\right)^{k+1} \frac{f(t)}{z - z_0}$$

сходятся равномерно относительно t на Γ' и γ' соответственно, поскольку функция $\frac{f(t)}{t-z_0}$ ограничена на Γ', $\frac{f(z)}{z-z_0}$ — на γ', а

$$\left|\frac{z-z_0}{t-z_0}\right|_{t\in\Gamma'} = \frac{|z-z_0|}{R_1} < 1 \quad \text{и} \quad \left|\frac{t-z_0}{z-z_0}\right|_{t\in\gamma'} = \frac{r_1}{|z-z_0|} < 1.$$

Поэтому, подставляя эти ряды в (59) вместо их сумм, с помощью почленного интегрирования получим равенство

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k, \tag{60}$$

в котором

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma'} \frac{f(t)dt}{(t-z_0)^{k+1}}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma'} \frac{f(t)dt}{(t-z_0)^{k+1}}, \quad k = -1, -2, \ldots$$

Так как функции $\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}$, $k \in \mathbb{Z}$, аналитичны в кольце K, то по обобщенной теореме Коши для двусвязной области в этих интегралах вместо Γ' и γ' можно взять любую окружность $\gamma = \{|t-z_0| = \rho\}$, где $r < \rho < R$, в результате чего для определения коэффициентов c_k получим формулу (58).

Предположим теперь, что существует другое разложение функции $f(z)$ по степеням $z - z_0$ в кольце K:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c'_k (z-z_0)^k, \quad z \in K.$$

Умножая равенство

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c'_k (z-z_0)^k$$

на $(z-z_0)^{-n-1}$, $n \in \mathbb{Z}$, и почленно интегрируя ряды по окружности $\gamma = \{|z-z_0| = \rho\}$, $r < \rho < R$, на основании легко проверяемой с помощью замены $z - z_0 = \rho e^{i\varphi}$, $0 < \varphi < 2\pi$, формулы

$$\int\limits_{\gamma} (z-z_0)^m dz = \begin{cases} 0, & m \neq -1, \\ 2\pi i & m = -1, \end{cases}$$

получим: $c_n = c'_n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Таким образом, *разложение* (60) *функции* $f(z)$ *в данном кольце* K *единственно.*

Ряд в правой части (60) называется *рядом Лорана* аналитической в кольце K функции $f(z)$, а ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k = f_1(z) \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} (z-z_0)^{-k} = f_2(z) \tag{61}$$

— соответственно *правильной* и *главной* частями лорановского разложения этой функции. Очевидно, что первый ряд сходится в круге $|z-z_0| < R$ к некоторой аналитической в этом круге функции $f_1(z)$, а второй при $|z-z_0| > r$ к некоторой аналитической там же функции $f_2(z)$.

6.2. Изолированные особые точки аналитической функции

Развитый в предыдущем пункте аппарат разложений Лорана позволит нам полностью изучить поведение аналитических функций в окрестности простейшего типа точек, в которых нарушается аналитичность функции – так называемых изолированных особых точек.

Точка a называется *изолированной особой точкой* функции $f(z)$, если существует проколотая окрестность этой точки (т.е. множество $\{0 < |z-a| < r\}$, если точка a конечна, или множество $\{R < |z| < \infty\}$, если $a = \infty$), в которой функция $f(z)$ аналитична.

В зависимости от поведения функции $f(z)$ в окрестности изолированной особой точки различают три типа особых точек.

Изолированная особая точка a функции $f(z)$ называется

1) *устранимой точкой*, если существует конечный

$$\lim_{z\to a} f(z) = A;$$

2) *полюсом*, если существует

$$\lim_{z\to a} f(z) = \infty;$$

3) *существенно особой точкой*, если $f(z)$ не имеет ни конечного, ни бесконечного предела при $z \to a$.

Подчеркнем, что здесь идет речь о точках, в окрестности которых функция однозначна.

Характер изолированной особой точки $z = a$ тесно связан с характером лорановского разложения функции в проколотой окрестности этой точки.

Согласно теореме Лорана в области $0 < |z-z_0| < \delta$ функция $f(z)$ разлагается в ряд (60). В зависимости от того, является ли множество отличных от нуля коэффициентов при отрицательных степенях $z - z_0$ в лорановском разложении (60) функции $f(z)$ *пустым*, *конечным* или *бесконечным*, z_0 будет являться *устранимой*, *полюсом* или *существенно особой точкой* функции $f(z)$.

Из определения нуля и полюса следует, что *если z_0 является нулем порядка m аналитической в области D функции $f(z)$, то для функции $F = \frac{1}{f(z)}$ точка z_0 является полюсом порядка m.*

Действительно, в силу изолированности нули z_0 функции $f(z)$ можно представить в виде $f(z) = (z - z_0)^m \psi(z)$, где $\psi(z)$ — аналитическая в области D функция, не обращающаяся в нуль в некотором круге $C(\delta, z_0) \subset D$. Следовательно, функция $\frac{1}{\psi(z)}$ тоже аналитична в круге $C(\delta, z_0)$, и если ее разложением Тейлора в окрестности точки z_0 является ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$, то лорановское разложение функции $F(z)$ в области $0 < |z - z_0| < \delta$ имеет вид

$$F(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} a_{k+m} (z - z_0)^k.$$

Поскольку $a_0 \neq 0$, то отсюда следует, что точка z_0 является полюсом порядка m функции $F(z)$.

Имеет место и обратное: *если точка z_0 является полюсом порядка m функции $f(z)$, то она будет нулем поряка m функции $F(z) = \frac{1}{f(z)}$, доопределенной в точке $z = z_0$ значением, равным нулю.*

Из установленной связи между нулями и полюсами функции $f(z)$ и $F(z) = \frac{1}{f(z)}$ легко получается следующее утверждение: *если в некоторой проколотой окрестности существенно особой точки z_0 аналитическая функция $f(z) \neq 0$, то эта точка является существенно особой и для функции $F(z) = \frac{1}{f(z)}$.*

Действительно, так как $f(z) \neq 0$ в некоторой области $0 < |z - z_0| < \delta$, то z_0 будет изолированной особой точкой функции $F(z)$. Полюсом или нулем (после доопределения) функции $F(z)$ точка z_0 быть не может, поскольку в силу доказанного она была бы соответственно нулем или полюсом функции $f(z)$. Если же z_0 — устранимая особая точка функции $F(z)$ со значением $\lim\limits_{z \to z_0} F(z) \neq 0$, то, очевидно, таковой она была бы и для $f(z)$, что также противоречит условию.

Поведение аналитической функции в окрестности ее существенно особой точки характеризует следующее утверждение.

Теорема 6.2. *(Сохоцкого-Вейерштрасса). Множество E значений, принимаемых аналитической функцией $w = f(z)$ в любой окрестности ее существенно особой точки z_0, всюду плотно на расширенной комплексной плоскости w, т.е. каждая точка a расширенной комплексной плоскости w либо принадлежит множеству E, либо является ее предельной точкой.*

6.3. Бесконечно удалённая изолированная особая точка

Пусть теперь изолированной особой точкой аналитической функции $f(z)$ является бесконечно удалённая точка, т.е. для некоторого $R > 0$ функция $f(z)$ аналитична в области $R <| z |< \infty$. Очевидно, функция $f(\frac{1}{\zeta})$ будет аналитической в области $0 <| \zeta |< \frac{1}{R}$, поэтому точка $\zeta = 0$–изолированная особая точка этой функции. Разложение функции $f(\frac{1}{\zeta})$ в окрестности точки $\zeta = 0$ в ряд Лорана

$$f(\frac{1}{\zeta}) = \sum_{k=1}^{\infty} d_{-k}\zeta^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} d_k\zeta^k$$

после замены переменного $\zeta = \frac{1}{z}$ даёт лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удалённой точки

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_{-k} z^{-k}, \quad c_k = d_{-k}. \tag{62}$$

В зависимости от того, является ли точка $\zeta = 0$ устранимой особой, полюсом или существенно особой для функции $f(\frac{1}{\zeta})$, говорят, что $z = \infty$ является устранимой особой точкой, полюсом или существенно особой точкой для функции $f(z)$.

Таким образом, в зависимости от того, пусто, конечно или бесконечно множество отличных от нуля коэффициентов при положительных степенях z в разложении(62), точка $z = \infty$ является устранимой особой, полюсом или существенно особой для функции $f(z)$.

Первый ряд в правой части (62) называется главной, а второй – правильной частью лорановского разложения функции $f(z)$ в окрестности точки $z = \infty$.

Всё, что было доказано о поведении аналитической функции вблизи конечной изолированной особой точки, очевидно, справедливо и в том случае, когда изолированной особой точкой является бесконечно удалённая точка. В частности, будем говорить, что функция $f(z)$, определённая в области $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, содержащей точку $z = \infty$, *аналитична в бесконечно удалённой точке*, если лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности этой точки имеет вид $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{c_{-k}}{z^k}$ и $f(\infty) = c_0$.

7. Элементы теории вычетов

7.1. Понятие вычета

Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$ - изолированная особая точка аналитической функции $f(z)$, а γ - кусочно-гладкая замкнутая кривая Жордана, лежащая в области аналитичности $f(z)$ и такая, что внутренняя по отношению к γ область D_γ содержит единственную особую точку z_0 функции $f(z)$. В силу теоремы Коши значение интеграла

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma f(t)\,dt$$

одно и то же для всех таких кривых γ и оно называется *вычетом* функции $f(z)$ относительно изолированной особой точки z_0 и обозначается символом $\underset{z=z_0}{Res} f(z)$.

Из формулы (49) при $k = -1$ и теоремы Коши следует, что в случае конечной изолированной особой точки z_0 имеем

$$\underset{z=z_0}{Res} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma f(t)\,dt = c_{-1}. \tag{63}$$

Итак, вычет аналитической функции $f(z)$ относительно изолированной особой точки z_0 равен коэффициенту c_{-1} при $(z-z_0)^{-1}$ в лорановском разложении $f(z)$ в окрестности точки z_0.

Очевидно, что в случае, когда z_0 – устранимая особая точка,

$$\underset{z=z_0}{Res} f(z) = 0.$$

Если z_0 - простой полюс, то

$$\underset{z=z_0}{Res} f(z) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z).$$

В частности, когда функция $f(z)$ представлена в виде

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

где $\varphi(z_0) \neq 0, \psi(z_0) = 0, \psi'(z_0) \neq 0$, отсюда получим

$$\underset{z=z_0}{Res} f(z) = c_{-1} = \lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z)-\psi(z_0)}{z-z_0}} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \tag{64}$$

Если же z_0 - полюс порядка $m > 1$, то

$$\underset{z=z_0}{Res} f(z) = c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]. \tag{65}$$

Предположим теперь, что изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ является бесконечно удалённой. В качестве γ возьмём окружность $|\, z \,| = R$ настолько большого радиуса, чтобы функция $f(z)$ была аналитична при

$|\, z \,| \geq R$. Так как теперь интегрирование вдоль γ происходит в отрицательном направлении (оставляющем окрестность $C(R, \infty)$ слева), то мы получим

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=R} f(t)\, dt = -c_{-1}. \tag{66}$$

Отсюда, в частности, следует, что *вычет аналитической функции относительно бесконечно удалённой устранимой особой точки (как и бесконечно удалённой точки аналитичности) может быть отличным от нуля.*

Теорема 7.1. *(Основная теорема о вычетах). Если функция $f(z)$ аналитична в области D с кусочно-гладкой границей Γ и непрерывна в $\overline{D}$ всюду, кроме конечного числа особых точек $z_k \in D, k = 1, 2, \ldots, n$, то*

$$\int\limits_{\Gamma} f(t)\, dt = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z). \tag{67}$$

Доказательство. Пусть $\delta > 0$ и такое, что $\overline{C(\delta, z_k)} \subset D, \overline{C(\delta, z_k)} \cap \overline{C(\delta, z_j)} = \emptyset,\ \ k, j = 1, 2, \ldots, n, k \neq j, \gamma_k = \partial C(\delta, z_k)$, а $\overline{D}_\delta = \overline{D} \setminus \cup_{k=1}^{n} C(\delta, z_k)$. Применяя обобщённую теорему Коши к функции $f(z)$ в $\overline{D}_\delta$ и учитывая (63), получим

$$\int\limits_{\Gamma} f(t)\, dt = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\gamma_k} f(t)\, dt = 2\pi \iota \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z).$$

Из формул (66) и (67) вытекает следующее утверждение : *если функция $f(z)$ аналитична на комплексной плоскости всюду, кроме конечного числа особых точек $z_k, k = 1, 2, \ldots, n$, то*

$$\sum_{k=0}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) = 0, \tag{68}$$

где $z_0 = \infty$.

Действительно, при достаточно большом $R > 0$ точки $z_1, z_2, \ldots, z_n$ лежат в круге $|\, z \,| < R$, поэтому из (67) имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=R} f(t)\, dt = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z).$$

Но интеграл в левой части этого равенства в силу (66) равен $-\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)$, откуда и следует (68).

7.2. Вычисление некоторых интегралов

Приведём теперь несколько примеров вычисления интегралов с помощью вычетов.

1. $\mathcal{I}_1 = \int\limits_0^{2\pi} \mathcal{R}(\sin\varphi, \cos\psi)\, d\varphi$,

где $\mathcal{R}$ — рациональная функция переменных $\sin\varphi, \cos\varphi$, непрерывная при $\varphi \in [0, 2\pi]$. Замена переменного $z = e^{i\varphi}$ даёт

$$\sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \quad \cos\varphi = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad d\varphi = \frac{dz}{iz},$$

в силу чего получим

$$\mathcal{I}_1 = \frac{1}{i} \int\limits_{|z|=1} \mathcal{R}\left[\frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z}), \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})\right] \frac{dz}{z} =$$

$$= 2\pi \sum_k \underset{\substack{z = z_k \\ |z_k| < 1}}{Res}\ \mathcal{R}\left[\frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z}), \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})\right] \frac{1}{z}.$$

2. $\mathcal{I}_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$,

где $f(x)$ – аналитическая при $\Im m z > 0$ и непрерывная при $\Im m z \geq 0$ функция с конечным числом особых точек $z_k, \Im m z_k > 0,\ k = 1, 2, \ldots, n$. При достаточно большом R все особые точки z_k будут лежать в полукруге $\mid z \mid < R, \Im m z > 0$, а на дуге $\Gamma_R : \mid z \mid = R, \Im m z \geq 0$ функция $f(z)$ будет непрерывна. Для контура $C_R = [-R, R] \cup \Gamma_R$ имеем

$$\int\limits_{C_R} f(z)\, dz = \int\limits_{-R}^{R} f(x)\, dx + \int\limits_{\Gamma_R} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{Res} f(z). \tag{69}$$

Полагая $M(R) = \underset{z\in\Gamma_R}{max} |f(z)|$, получим неравенство

$$\left| \int\limits_{\Gamma_R} f(z)\, dz \right| \leq \pi R M(R).$$

Поэтому в предположении, что $RM(R) \to 0$ при $R \to \infty$, переход к пределу при $R \to \infty$ в равенстве (69) даёт

$$\mathcal{I}_2 = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{Res} f(z).$$

3. $\mathcal{I}_3 = \int\limits_{\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x}\, dx$,

где $\lambda > 0$, а $f(z)$ – аналитическая при $\Im m z > 0$ и непрерывная в $\Im m z \geq$

функция, за исключением конечного числа особых точек z_k, $\Im m z_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, и $f(z) \to 0$ при $z \to \infty, \Im m z \geq 0$.

Имеет место следующее утверждение.

Лемма Жордана. *Если непрерывная на последовательности дуг* $\Gamma_{R_n} : \mid z \mid = R_n, \Im m z \geq -a, R_n \to \infty$ *при* $n \to \infty$, *функция* $f(z) \to 0$ *равнометрно относительно* $\arg z$ *при* $z \in \Gamma_{R_n}, n \to \infty$, *то для любого* $\lambda > 0$ *имеем*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Gamma_{R_n}} f(z) e^{i\lambda z}\, dz = 0.$$

Доказательство. Пусть $a > 0$, $\alpha(R_n) = \arcsin \frac{a}{R_n}$ и $M(R_n) = \max\limits_{z\in\Gamma_{R_n}} |f(z)|$. По условию леммы при $n \to \infty$ имеют место соотношения: $M(R_n) \to 0$, $\alpha(R_n) \to 0$, $R_n\alpha(R_n) \to \alpha$. Для $z \in \Gamma_{R_n}$ имеем $z = R_n e^{i\varphi}$, $-\alpha(R_n) \leq \varphi \leq \pi + \alpha(R_n)$. Для каждой из частей дуги Γ_{R_n}, на которой $y \leq 0$, получим

$$\left|\int f(z) e^{i\lambda z}\, dz\right| \leq R_n M(R_n) \int\limits_0^{\alpha(R_n)} e^{-\lambda y}\, d\varphi \leq$$

$$\leq M(R_n) R_n \alpha(R_n) e^{\lambda a} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Для оставшейся части дуги Γ_{R_n}, т.е. когда $0 \leq \varphi \leq \pi$, в силу неравенства

$$\sin\varphi \geq \frac{2\varphi}{\pi}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},$$

будем иметь

$$\left|\int f(z) e^{i\lambda z}\, dz\right| \leq R_n M(R_n) \int\limits_0^{\pi} e^{-\lambda R_n \sin\varphi}\, d\varphi \leq$$

$$\leq 2R_n M(R_n) \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi}\lambda R_n \varphi}\, d\varphi = M(R_n)\frac{\pi}{\lambda}(1 - e^{-\lambda R_n}) \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

В случае $a \leq 0$ достаточно второй оценки.

Возвращаясь к вычислению интеграла $\mathcal{I}_3$, заметим, что $f(z) \to 0$ равномерно относительно $\arg z$, когда $z \to \infty, \Im m z \geq 0$. Взяв контур C_R, как в предыдущем примере, и устремив R к ∞, в силу леммы Жордана получим

$$\mathcal{I}_3 = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{Res} f(z) e^{i\lambda z}.$$

7.3. Принцип аргумента аналитической функции

Пусть функция $f(z)$ аналитична в проколотой окрестности $\{0 < |z-a| < r\}$ точки $a \in \mathbb{C}$ и не обращается там в нуль. Мы назовем *логарифмическим вычетом* функции $f(z)$ в точке a вычет логарифмической производной

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{d}{dz} \operatorname{Ln} f(z)$$

этой функции в точке a.

Кроме изолированных особых точек (однозначного характера) функция $f(z)$ может иметь отличный от нуля логарифмический вычет в своих нулях.

Пусть точка $z = a$ - нуль порядка n функции $f(z)$. Тогда в некоторой окрестности $C(\delta, a)$ имеем $f(z) = (z-a)^n \varphi(z)$, где $\varphi(z)$ аналитична в $C(\delta, a)$ и не равна там нулю. Поэтому в $C(\delta, a)$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n(z-a)^{n-1}\varphi(z) + (z-a)^n \varphi'(z)}{(z-a)^n \varphi(z)} = \frac{1}{z-a} \cdot \frac{n\varphi(z) + (z-a)^n \varphi'(z)}{\varphi(z)},$$

где второй множитель аналитичен в $C(\delta, a)$ и, следовательно, разлагается в $C(\delta, a)$ в ряд Тейлора, причем свободный член этого разложения равен n (значению множителя при $z = a$). Таким образом, в $C(\delta, a)$ имеем

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z-a}\{n + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots\} = \frac{n}{z-a} + c_1 + c_2(z-a) + \ldots, \quad (70)$$

откуда видно, что в нуле порядка n логарифмическая производная аналитической функции имеет полюс первого порядка с вычетом n, т.е. *логарифмический вычет в нуле равен порядку этого нуля.*

Если a - полюс функции $f(z)$ порядка p, то $\frac{1}{f(z)}$ имеет в этой точке нуль порядка p, а так как

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{d}{dz} \operatorname{Ln} \frac{1}{f(z)},$$

то с учетом (70) получим, что в полюсе порядка p логарифмическая производная функции имеет полюс первого порядка с вычетом $-p$, т.е. *логарифмический вычет в полюсе равен порядку этого полюса с обратным знаком.*

Полученные результаты позволяют доказать следующую теорему.

Теорема 7.2. *Пусть функция $f(z)$ аналитична в замкнутой области $\overline{D}$ с кусочно-гладкой границей Γ всюду, кроме конечного числа полюсов, лежащих в области D, и $f(z) \neq 0$ на Γ. Тогда разность между полным числом нулей и полным числом полюсов функции $f(z)$ в области D определяется выражением*

$$N - P = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} \, dz, \quad (71)$$

где Γ - *ориентированная граница, а под полным числом нулей (полюсов) понимается число нулей* N *(полюсов* P*) с учетом их кратности:*

$$N = \sum_{k=1}^{n} n_k, \quad P = \sum_{k=1}^{p} p_k.$$

Данной теореме можно придать геометрическую формулировку.

Принцип аргумента. *Если функция* $f(z)$ *аналитична в замкнутой области* $\overline{D}$ *с кусочно-гладкой границей* Γ *всюду, кроме конечного числа полюсов, лежащих в области* D, *и* $f(z) \neq 0$ *на* Γ, *то приращение аргумента функции* $f(z)$ *при однократном обходе точкой* z *кривой* Γ *в положительном направлении равно* $2\pi(N-P)$, *где* N *и* P – *соответственно число нулей и полюсов функции* $f(z)$ *в области* D *с учётом их порядков, т.е.*

$$[\arg f(z)]_\Gamma = 2\pi(N-P). \tag{72}$$

Так же весьма полезной является следующая теорема.

Теорема 7.3. *(Руше). Если функции* $\varphi(z)$ *и* $\psi(z)$ *аналитичны в замкнутой области* $\overline{D}$ *с кусочно-гладкой границей* Γ *и для всех* $z \in \Gamma$ *имеет место неравенство*

$$|\varphi(z) - \psi(z)| < |\psi(z)|, \tag{73}$$

то обе эти функции имеют в D *одинаковое число нулей.*

Доказательство. Из (73) следует, что $\varphi(z) \neq 0$ и $\psi(z) \neq 0$ на кривой Γ, а значения функции $F(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ удовлетворяют на Γ условию $\mid F(z) - 1 \mid < 1$. Это означает, что при полном обходе точкой z кривой Γ в положительном направлении приращение аргумента функции $F(z)$ равно нулю. Отсюда, поскольку $\arg F(z) = \arg\varphi(z) - \arg\psi(z)$, получаем $[\arg\varphi(z)]_\Gamma = [\arg\psi(z)]_\Gamma$, но так как функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ не имеют в области D полюсов, то согласно (72) они имеют в D одинаковое число нулей.

Из теоремы Руше вытекает следующее свойство однолистных аналитических функций: *в области однолистности аналитической функции* $f(z)$ *её производная* $f'(z)$ *нигде не обращается в нуль.*В самом деле, допустим, что в некоторой точке z_0 области однолистности D аналитической функции $f(z)$ производная $f'(z_0) = 0$. Тогда разложение $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки z_0 имеет вид

$$f(z) = c_0 + \sum_{k=n}^{\infty} c_k (z-z_0)^k, c_n \neq 0, n \geq 2,$$

поскольку $c_1 = f'(z_0) = 0$. Выберем настолько малое число $\delta, 0 < \delta < \rho(z_0, \partial D)$, чтобы

$$f'(z) \neq 0, 0 < \mid z - z_0 \mid \leq \delta, \tag{74}$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} c_k (z-z_0)^{k-n} \neq 0, \quad \mid z - z_0 \mid \leq \delta. \tag{75}$$

Из (75) следует, что

$$\min_{|z-z_0|=\delta} \mid \sum_{k=n}^{\infty} c_k(z-z_0)^k \mid = m > 0. \tag{76}$$

Обозначим через α произвольное комплексное число, удовлетворяющее условию $0 <\mid \alpha \mid< m$. Функции

$$\varphi(z) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k(z-z_0)^k + \alpha = f(z) - c_0 + \alpha$$

и

$$\psi(z) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$$

удовлетворяют в замкнутом круге $\overline{C(\delta, z_0)}$ условиям теоремы Руше. Как следует из (75), число нулей функции $\psi(z)$, а следовательно, и функции $\varphi(z)$ в круге $C(\delta, z_0)$ равно n, причём поскольку $\varphi(z_0) = \alpha \neq 0$ и $\varphi'(z) = f'(z)$, то в силу (74) каждый из нулей функции $\varphi(z)$ является простым. Таким образом, функция $f(z)$ принимает значение $c_0 - \alpha$ в n точках круга $C(\delta, z_0)$, $n \geq 2$, что противоречит её однолистности.

8. Начальные сведения о конформных отображениях

8.1. Конформное отображение

Пусть $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ – аналитическая в области D функция, причем для некоторой точки $z_0 \in D$ имеем

$$f'(z_0) \neq 0. \tag{77}$$

Поскольку в силу (14)

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x^2 + v_x^2 = |f'(z)|^2, \tag{78}$$

то условие (77) равносильно тому, что

$$\left.\frac{D(u,v)}{D(x,y)}\right|_{z=z_0} \neq 0,$$

и по теореме о неявных функциях система уравнений $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ в некоторой окрестности точки $w_0 = f(z_0)$ определяет однозначные непрерывные функции $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ со значениями в окрестности точки z_0. Нетрудно показать, что при непрерывном отображении открытого множества прообраз любого открытого множества открыт и связность множества сохраняется, поэтому *достаточно малая окрестность точки z_0* ***взаимно однозначно*** *отображается функцией $w = f(z)$ на некоторую область, содержащую точку w_0*. Обратная функция $z = f^{-1}(w)$ будет непрерывной в некоторой окрестности точки w_0 и дифференцируемой в самой точке w_0, причем

$$f^{-1\prime}(w_0) = \lim_{\Delta w \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta w} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta w}{\Delta z}} = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Если $f'(z) \neq 0$ в каждой точке области D, то будем говорить, что функция $f(z)$ *локально однолистна* в D. Заметим, что из локальной однолистности не следует однолистность, что показывает пример функции $w = z^2$ области $0 < |z| < 1$, $0 < \arg z < \frac{5\pi}{4}$.

Выясним теперь *геометрический смысл модуля и аргумента производной* аналитической функции. Пусть в области D задана аналитическая функция $w = f(z)$, удовлетворяющая условию (77), и пусть γ – проходящая через точку z_0 гладкая кривая Жордана с уравнением $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$. Если $z_0 = z(t_0)$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$, то

$$z'(t_0) \neq 0. \tag{79}$$

Функция $w = f(z)$ отображает кривую γ на некоторую кривую $\Gamma = f(\gamma)$, проходящую через точку $w_0 = f(z_0)$. Уравнение кривой Γ имеет вид $w = w(t) = f[z(t)] = u(t) + iv(t)$, причем в силу (77) и (79) имеем:

$$w'(t_0) = f'(z_0) z'(t_0) \neq 0. \tag{80}$$

Поскольку

$$\mathrm{d}z = z'(t)\mathrm{d}t = [x'(t) + iy'(t)]\mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}s = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\mathrm{d}t = |z'(t)|\,\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}w = w'(t)\mathrm{d}t = [u'(t) + iv'(t)]\mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}\sigma = \sqrt{[u'(t)]^2 + [v'(t)]^2}\mathrm{d}t = |w'(t)|\,\mathrm{d}t,$$

где $\mathrm{d}s$ и $\mathrm{d}\sigma$ элементы длины дуги кривых γ и Γ в точках $z = z(t)$ и $w = w(t)$ соответственно, а в силу (80) имеем

$$\left.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right|_{t=t_0} = \frac{w'(t_0)}{z'(t_0)} = f'(z_0),$$

то мы получаем равенство

$$|f'(z_0)| = \frac{\mathrm{d}\sigma_0}{\mathrm{d}s_0},$$

где $\mathrm{d}s_0$ и $\mathrm{d}\sigma_0$ – элементы длины дуги кривых γ и Γ в точках $z_0 = z(t_0)$ и $w_0 = w(t_0) = f(z_0)$ соответственно.

Таким образом, *модуль* отличной от нуля *производной* аналитической функции $f(z)$ равен *коэффициенту искажения* элемента длины дуги в точке z_0 при отображении с помощью функции $w = f(z)$ и не зависит от направления дуги в этой точке, поэтому мы будем говорить, что при указанном отображении в точке z_0 имеет место *постоянство искажения.*

В силу (80) можно написать также, что (с точностью до $2k\pi$)

$$\arg f'(z_0) = \arg w'(t_0) - \arg z'(t_0), \tag{81}$$

и поскольку $\arg z'(t_0)$ и $\arg w'(t_0)$ дают углы наклона касательных к кривым γ и Γ в точках z_0 и w_0 соответственно (см. рис. 2), то *аргумент производной*

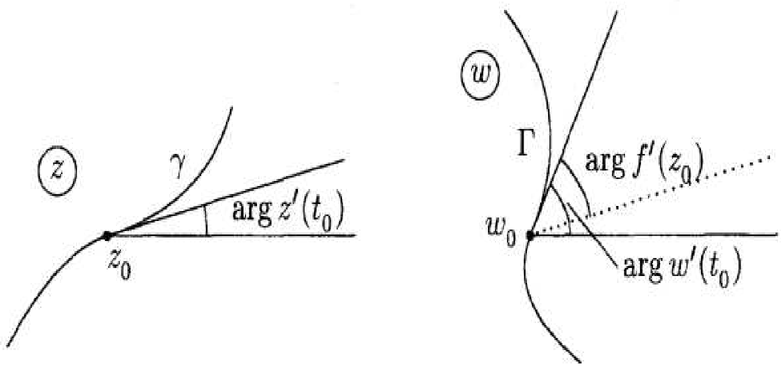

Рис. 2. Конформное отображение

аналитической функции $f(z)$ *равен углу поворота* кривой γ в точке z_0 при отображении с помощью функции $w = f(z)$.

Пусть теперь γ_1 – отличная от γ гладкая кривая Жордана, проходящая через точку z_0, а $\Gamma_1 = f(\gamma_1)$ – ее образ. Очевидно, что кривая γ_1 в точке z_0 поворачивается при отображении $w = f(z)$ на тот же угол (равный $\arg f'(z_0)$), что и кривая γ, поэтому угол между кривыми γ и γ_1 в точке z_0 равен углу между их образами Γ и Γ_1 в точке $w_0 = f(z_0)$. Другими словами, в каждой точке $z \in D$, в которой $f'(z) \neq 0$, при отображении с помощью функции $w = f(z)$, имеет место *консерватизм углов.*

Конформным отображением области D называется топологическое, т. е. взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение этой области, при котором в каждой точке $z \in D$ имеет место консерватизм углов и постоянство искажения.

Из геометрического смысла модуля и аргумента производной непосредственно следует справедливость утверждения: *если функция $w = f(z)$ осуществляет отображение, обладающее в каждой точке z области D консерватизмом углов и постоянством искажения, то она аналитична в D, причем $f'(z) \neq 0$.*

В силу последнего утверждения *конформное отображение осуществляется однолистной аналитической функцией $w = f(z)$, с производной $f'(z) \neq 0$.*

8.2. Основные свойства конформных отображений

Выше было доказано, что *у однолистной аналитической в области D функции $f(z)$ производная $f'(z) \neq 0$ всюду в D.* Тогда обратная функция $z = f^{-1}(w)$ обладает на множестве $f(D)$ отличной от нуля производной, а следовательно, является и непрерывной функцией. Отсюда, ввиду сказанного при обсуждении вопроса об обращении функции комплексного переменного, следует утверждение: *однолистная аналитическая функция $w = f(z)$ конформно отображает область своего задания D на некоторую область D_1 плоскости w*, причем обратная функция $f^{-1}(w)$ однолистна и аналитична в D_1.

Теорема 8.1. *(Римана). Для каждой односвязной области D, граница которой состоит более чем из одной точки, существует конформное отображение $w = f(z)$ этой области на круг $| w |< 1$.*

Область D будем называть *жордановой*, если её граница состоит из конечного числа замкнутых кривых Жордана.

Приведём без доказательства следующее утверждение о соответствии границ при конформном отображении односвязных жордановых областей.

Теорема 8.2. *При конформном отображении $w = f(z)$ односвязной жордановой области D с границей Γ на жорданову область D_1 с границей Γ_1 функция $w = f(z)$ устанавливает взаимно однозначное и непрерывное соответствие между $D \cup \Gamma$ и $D_1 \cup \Gamma_1$ с сохранением направления обхода на Γ и Γ_1.*

На основании этой теоремы единственность аналитической функции $w = f(z)$, осуществляющей конформное отображение односвязной жордановой области D с границей Γ на круг $| w |< 1$, может быть доказана при выполнении следующего условия: три заданные точки t_1, t_2, t_3 границы Γ переходят соответственно в три заданные точки τ_1, τ_2, τ_3 окружности $\mid w \mid = 1$ с сохранением направления обхода.

Теорема 8.3. *(Принцип взаимно-однозначного соответствия). Если границы Γ и Γ_1 односвязных областей D и D_1 являются замкнутыми кусочно-гладкими кривыми Жордана и аналитическая в $\overline{D}$ функция $w = f(z)$ взаимно однозначно и непрерывно отображает Γ на Γ_1 с сохранением направления обхода, то она конформно отображает область D на область D_1.*

Принцип взаимно однозначного соответствия, очевидно, останется в силе, если $f(z)$ аналитична в $\overline{D}$ всюду, кроме конечного числа точек границы Γ, в которых $f'(z)$ обращается в бесконечность, но интегрируема вдоль Γ. Этот принцип верен и в том случае, когда одна из рассматриваемых областей, например D, является полуплоскостью.

8.3. Дробно-линейная функция

Для построения простейших конформных отображений весьма часто используют дробно-линейную функцию:

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \tag{82}$$

с условием

$$ad - bc \neq 0. \tag{83}$$

Условие (83) накладывается для того, чтобы исключить случай вырождения в постоянную. Это же условие гарантирует однолистность функции. В самом деле, при различных значениях z_1 и z_2 переменного z для разности соответствующих значений w_1 и w_2 функции (82) имеем

$$w_1 - w_2 = \frac{(ad - bc)(z_1 - z_2)}{(cz_1 + d)(cz_2 + d)}, \tag{84}$$

что при условии (83) дает однолистность осуществляемого функцией (82) отображения на расширенной комплексной плоскости z.

Данная функция определена на полной плоскости z (ее значение в точке $z = -\frac{d}{c}$ – считается равным ∞, а в точке $z = \infty$ – равным $\lim\limits_{z\to\infty} w = \frac{a}{c}$). Легко показать, что дробно-линейная функция конформно отображает плоскость z на плоскость w.

Приведем без доказательства два важнейших свойства дробно-линейной функции.

Теорема 8.4. *Заданием соответствия трем различным точкам плоскости z трех различных точек плоскости w дробно-линейная функция определена однозначно.*

Если считать прямую линию за окружность бесконечного радиуса, то имеем

Теорема 8.5. *(Круговое свойство). Дробно-линейная функция переводит окружности на плоскости z в окружности на плоскости w.*

Список литературы

1. Алешков Ю.З., Смышляев П.П. Теория функций комплексного переменного и ее приложения: Учеб. пособие.- Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1986. - 248 с.
2. Билута П.А. Лекции по теории функций комплексного переменного: Учеб. пособие. 2-е изд., перераб. и доп.- Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2005. - 238 с.
3. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. 13-е изд.- М.: Наука, 1984. - 432 с.
4. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. - 336 с.
5. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. В 2 ч.: Учебник. Ч.1. Функции одного переменного. - СПб.: Лань, 2004. - 280 с.
6. Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович Г.Л. Сборник задач по теории функций комплексного переменного: Учеб. пособие. 4-е изд., испр. и доп. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. - 312 с.

Никитенко Евгений Витальевич

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Учебное пособие для студентов направления "Информатика и вычислительная техника"

Редактор Е.Ф. Изотова

Подписано к печати 25.01.16. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 3,69. Тираж 35 экз. Зак. № 161188. Рег. № 123

Отпечатано в ИТО Рубцовского индустриального института.
658207, г. Рубцовск, ул. Тракторная, 2/6.